

### Résonance paramétrique d'un pendule

**Résumé :** On s'intéresse à la possibilité de rendre instable un équilibre stable d'un pendule oscillant en variant la longueur de ce dernier.

**Mots clefs :** Équations différentielles ordinaires. Propriétés qualitatives des solutions. Dépendance par rapport aux paramètres.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

## 1. Introduction

On s'intéresse dans ce texte au phénomène de résonance paramétrique : contrairement au phénomène de résonance classique créée par une force extérieure et qui peut être modélisé par l'équation suivante

$$(1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t),$$

pour  $\omega \approx \omega_0$ , la résonance est ici créée par le système lui-même. Pour étudier ce phénomène, considérons un pendule oscillant de masse  $m$  dont la longueur  $\ell$  peut varier au cours du temps.

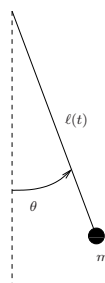


FIGURE 1. Pendule oscillant à longueur variable.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient l'équation différentielle suivante

$$(2) \quad \ddot{\theta}(t) + 2 \frac{\dot{\ell}(t)\dot{\theta}(t)}{\ell(t)} + \frac{g}{\ell(t)} \sin(\theta(t)) = 0.$$

On va supposer que  $\ell$  oscille autour d'une valeur moyenne  $\ell_0$  et que l'on peut écrire  $\ell$  sous la forme  $\ell(t) = \ell_0/(1 + \varepsilon \cos(\omega_1 t))$ , où  $0 < \varepsilon \ll 1$  et  $\omega_1 > 0$ . Si l'on cherche  $\theta$  sous la forme  $\theta(t) = \underline{\theta}(\omega_1 t)$  et l'on pose  $\omega_0^2 = g/\ell_0$ , on obtient

$$(3) \quad \ddot{\underline{\theta}}(t) + 2 \frac{\varepsilon \sin(t)}{1 + \varepsilon \cos(t)} \dot{\underline{\theta}}(t) + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} (1 + \varepsilon \cos(t)) \sin(\underline{\theta}(t)) = 0.$$

Si l'on suppose de plus  $\varepsilon \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = \mathcal{O}(1)$ , alors, en négligeant le terme d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , on aboutit à l'équation

$$(4) \quad \ddot{\underline{\theta}}(t) + \omega^2 (1 + \varepsilon \cos(t)) \sin(\underline{\theta}(t)) = 0, \quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \gg 1.$$

On va, pour simplifier, étudier les oscillations en  $\underline{\theta}$  de petite amplitude autour de 0 de sorte que  $\sin(\underline{\theta}) \approx \underline{\theta}$ . On peut alors réécrire l'équation (4) sous la forme

$$(5) \quad \ddot{\underline{\theta}} + \omega^2 (1 + \varepsilon \cos(t)) \underline{\theta} = 0.$$

Le but de ce texte est de montrer que, pour des valeurs particulières de  $\omega > 0$  (pas nécessairement très grandes), et pour  $\varepsilon > 0$ , on transforme le point d'équilibre *stable*  $(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}) = (0, 0)$  en un point *instable*. On rappelle ici les notions de stabilité et d'instabilité pour un point d'équilibre  $x_0$  d'un système différentiel de la forme  $\dot{x} = f(t, x)$  (i.e. le point  $x_0$  vérifie  $f(t, x_0) = 0$  pour tout  $t$ ).

**Définition 1.** *Le point d'équilibre  $x_0$  du système différentiel  $\dot{x} = f(t, x)$  est stable si pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x_1$  tel que  $\|x_1 - x_0\| < \eta$ , la solution  $t \mapsto x(t)$  de  $\dot{x} = f(t, x)$  telle que  $x(0) = x_1$  vérifie pour tout  $t > 0$ ,  $\|x(t) - x_0\| < \delta$ . Si le point  $x_0$  n'est pas stable, il est dit instable.*

Notons que cette définition suppose que les solutions de  $\dot{x} = f(t, x)$  sont définies sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier. Remarquons que l'équation (5) se met sous la forme d'un système différentiel linéaire à coefficients périodiques pour lequel on peut montrer l'existence globale de solutions. Avant d'aborder la question de la résonance paramétrique, introduisons quelques éléments de la théorie des systèmes différentiels à coefficients périodiques.

## 2. Systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques

On considère désormais le système différentiel

$$(6) \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X,$$

où  $A$  est une fonction donnée, continue,  $T$ -périodique et à valeurs dans  $M_n(\mathbb{R})$ , et  $X$  est une fonction inconnue, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Introduisons la matrice *résolvante*  $R(t) \in M_n(\mathbb{R})$  définie comme l'unique solution du problème de Cauchy

$$(7) \quad \frac{dR}{dt} = A(t)R, \quad R(0) = Id.$$

On peut alors montrer que la solution  $X$  de (6) telle que  $X(0) = X_0$  s'écrit  $X(t) = R(t)X_0$ . Du fait de la périodicité des coefficients et de l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy, on montre également l'égalité suivante

$$(8) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad R(t + kT) = R(t)R(kT) = R(t)R(T)^k.$$

Considérons maintenant les valeurs propres de la matrice  $R(T)$  : on va voir par la suite qu'elles jouent un rôle particulier dans l'étude de stabilité du système différentiel (6). Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $R(T)$  et  $X_0$  un vecteur propre correspondant. La solution de (6) issue de  $X_0$  vérifie dans ce cas

$$(9) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad X(t + kT) = \lambda^k X(t).$$

On remarque alors qu'une solution de ce type est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  si  $|\lambda| \leq 1$  et non bornée si  $|\lambda| > 1$ . Le cas limite  $\lambda = 1$  (resp.  $\lambda = -1$ ) correspond à une solution  $T$ -périodique (resp.  $2T$ -périodique) du système (6). Une conséquence importante de cette remarque est que si, l'on peut écrire toute solution  $X$  du système (6) sous la forme d'une combinaison linéaire de ce type de solutions, on obtient directement le comportement asymptotique des solutions de (6) en étudiant le spectre de  $R(T)$ . On généralise cette idée dans les deux théorèmes suivants.

**Théorème 1.** Soit  $B \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $R(T) = \exp(TB)$ . Posons pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P(t) = R(t) \exp(-Bt)$ . Alors  $P(t)$  est inversible pour tout  $t$ , et les applications  $t \mapsto P(t)$  et  $t \mapsto P(t)^{-1}$  sont continues et  $T$ -périodiques. De plus,  $X$  est solution du système (6) si et seulement si  $Y = P(t)^{-1}X$  est solution du système différentiel à coefficients constants  $\dot{Y} = BY$ .

La structure des solutions des systèmes différentiels à coefficients constants étant bien connue, on obtient ainsi par le changement d'inconnue  $Y = P(t)^{-1}X$  la structure des solutions pour le système (6). De plus,  $P$  et  $P^{-1}$  étant continues et périodiques, les solutions  $X$  de  $\dot{X} = A(t)X$  et les solutions  $Y$  de  $\dot{Y} = BY$  sont de même nature du point de vue de la stabilité : c'est donc la partie réelle des valeurs propres de  $B$  qui joue ici un rôle. En effet, on rappelle le théorème suivant :

**Théorème 2.** Soit  $B \in M_n(\mathbb{C})$  alors la matrice  $\exp(tB)$  est bornée pour tout  $t \geq 0$  si et seulement si d'une part les valeurs propres de  $B$  sont de parties réelles négatives et d'autre part les éventuelles valeurs propres de  $B$  purement imaginaires sont semi simples.

**Rappel.** Une valeur propre  $\lambda$  de  $B$  est *semi simple* si c'est une racine de multiplicité 1 du polynôme minimal de  $B$ .

**Preuve.** La preuve est fondée sur un calcul explicite de  $\exp(tB)$  en écrivant  $B$  sous la forme  $B = D + N$  où  $D$  est diagonalisable et  $N$  nilpotente avec  $DN = ND$  (décomposition de Dunford).  $\square$

Par conséquent, l'origine de  $\mathbb{R}^n$  est stable pour le système différentiel  $\dot{X} = A(t)X$  si et seulement si les valeurs propres de  $R(T)$  sont de module inférieur ou égal à un et les valeurs propres  $\lambda = \exp(i\rho T)$  de module 1 correspondent à des valeurs propres semi simples  $i\rho$  de  $B$ .

Examinons le cas de l'équation (5) : en posant  $X = {}^t(\underline{\theta}, \dot{\theta})$ , cette équation s'écrit sous la forme d'un système différentiel

$$(10) \quad \frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1 + \varepsilon \cos(t)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on l'a vu précédemment, la stabilité du point  $X = {}^t(0, 0)$  est liée au module des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $R(2\pi)$ . Ces valeurs propres sont les racines du trinôme  $X^2 - \text{Tr}(R(2\pi))X + \det(R(2\pi))$ . On a en fait une formule explicite pour  $\det(R(2\pi))$  : la fonction  $t \mapsto \det(R(t))$  est solution du problème de Cauchy

$$(11) \quad \frac{d(\det(R(t)))}{dt} = \text{Tr}(A(t))\det(R(t)), \quad \det(R(0)) = 1.$$

Ici,  $\text{Tr}(A(t)) = 0$  donc  $\det(R(2\pi)) = 1$ . On en déduit donc la proposition suivante, conséquence immédiate des théorèmes précédents :

**Proposition 1.** – Si  $|\text{Tr}(R(2\pi))| < 2$ , les deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  sont complexes conjuguées et de module 1 : le système différentiel est stable et toutes les solutions sont bornées.  
 – Si  $|\text{Tr}(R(2\pi))| > 2$ , les deux valeurs propres sont réelles, distinctes de  $\pm 1$  et inverses l'une de l'autre : le système différentiel est donc instable.  
 – Si  $|\text{Tr}(R(2\pi))| = 2$ , le système possède une solution  $2\pi$ -périodique ou  $4\pi$ -périodique.

L'étude de la stabilité des solutions de l'équation (5) est donc ramenée au calcul de  $\text{Tr}(R(2\pi))$ . À défaut d'une formule explicite pour cette quantité, nous allons en calculer un développement limité en  $\varepsilon$  au voisinage de 0.

### 3. Calcul de la première résonance paramétrique : courbes de bifurcation

La dépendance du système différentiel par rapport au paramètre  $\varepsilon$  étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il en est de même pour les solutions de ce système et on peut en écrire un développement limité par rapport à  $\varepsilon$  au voisinage de 0. Ce développement est uniforme sur tout intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . C'est la situation qu'on étudie ici puisqu'on ne s'intéresse à  $R$  que sur l'intervalle de temps  $[0, 2\pi]$ . On écrit donc la résolvante sous la forme

$$(12) \quad R(t) = R_0(t) + \varepsilon R_1(t) + \varepsilon^2 R_2(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

On pourrait pousser le développement de  $R$  à n'importe quel ordre mais on n'en a pas besoin pour le cas que nous étudierons ici. On écrit la matrice  $A = A_0 + \varepsilon A_1$ . Alors  $R_0, R_1, R_2$  sont

solutions des problèmes de Cauchy

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{dR_0}{dt} &= A_0 R_0, & R_0(0) &= Id, \\ \frac{dR_1}{dt} &= A_0 R_1 + A_1 R_0, & R_1(0) &= 0, \\ \frac{dR_2}{dt} &= A_0 R_2 + A_1 R_1, & R_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

On résout successivement ces systèmes différentiels. La solution du premier s'écrit

$$(14) \quad R_0(t) = \exp(t A_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

On obtient ensuite les expressions pour  $R_1$ ,  $R_2$  en utilisant la formule de Duhamel (encore appelée méthode de variation de la constante) :

$$(15) \quad R_i(t) = \int_0^t \exp((t-s)A_0) A_1(s) R_{i-1}(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

On peut alors montrer (le calcul est un peu long mais peut être mené par exemple à l'aide d'un logiciel de calcul formel) que  $\text{Tr}(R(2\pi))$  est donnée par la formule

$$(16) \quad \text{Tr}(R(2\pi)) = 2 \cos(2\pi\omega) + \frac{\pi\omega^3 \varepsilon^2}{4\omega^2 - 1} \sin(2\pi\omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Pour  $\varepsilon = 0$ ,  $\text{Tr}(R(2\pi)) = 2 \cos(2\pi\omega)$ . Par suite, on a stabilité si  $\omega \neq \frac{k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  lorsque  $\varepsilon$  suffisamment proche de 0 (pour avoir  $|\text{Tr}(R(2\pi))| < 2$ ). Examinons la première résonance paramétrique pour le cas limite  $\omega \approx \frac{1}{2}$ . Dans ce cas,  $\text{Tr}(R(2\pi)) \approx -2$ . On va examiner les points du plan  $(\omega, \varepsilon) \approx (\frac{1}{2}, 0)$  pour lesquels  $\text{Tr}(R(2\pi)) = -2$ . Ces points séparent les zones de stabilité des zones d'instabilité. À l'aide d'un développement limité, on montre que  $\text{Tr}(R(2\pi)) = -2$  si et seulement si

$$(17) \quad \omega(\varepsilon) = \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

On déduit de cette étude qu'au voisinage de  $(\frac{1}{2}, 0)$ , si  $(\omega, \varepsilon)$  est tel que  $\omega \in [\omega^-(\varepsilon), \omega^+(\varepsilon)]$ , alors  $|\text{Tr}(R(2\pi))| > 2$  et le système différentiel associé à ces valeurs de paramètres est instable.

#### 4. Applications numériques

On illustre ici numériquement le phénomène d'instabilité paramétrique sur le modèle de pendule linéaire pour des valeurs de paramètres  $\omega = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  et  $\omega = 1$ ,  $\varepsilon = 0.2$ . On part avec la condition initiale  $\theta(0) = \frac{\pi}{8}$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ , on a choisi ici le schéma de Runge Kutta 4 (d'ordre élevé) pour éviter les problèmes d'instabilités numériques rencontrés fréquemment avec les schémas d'Euler quand on fait la simulation numérique pour un pendule simple.

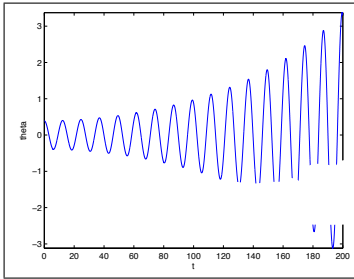


FIGURE 2.  $\omega = \frac{1}{2}$  et  $\varepsilon = 0.1$ .

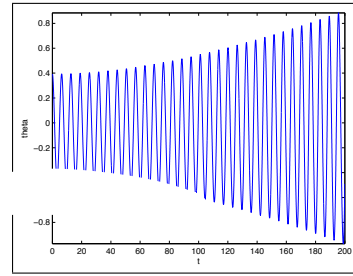


FIGURE 3.  $\omega = 1$  et  $\varepsilon = 0.2$ .

On souhaite également faire un prolongement numérique des courbes d'instabilités obtenues précédemment pour des valeurs de  $\varepsilon$  pas nécessairement proches de 0. Dans le cas en question, on va chercher les zéros de la fonction  $f : (\omega, \varepsilon) \mapsto \text{Tr}(R(2\pi)) + 2$ . Détaillons le calcul pour  $\omega^+(\varepsilon)$  : on choisit de représenter cette courbe avec un pas de  $\delta\varepsilon = 0.1$ . On commence par résoudre le problème pour  $\varepsilon = 0.1$  à l'aide d'une méthode à pente constante (qu'on évalue numériquement) et on choisit pour donnée initiale  $\omega^0 = \frac{1}{2} + 0.01$  (d'après les développements limités faits précédemment, on s'attend à avoir  $\omega^+(0.1) > 0.5$ ). Une fois calculée la valeur approchée de  $\omega^+(0.1)$ , on passe au calcul de  $\omega^+(0.2)$  en utilisant une méthode à pente constante et avec la donnée initiale  $\omega^0 = \omega^+(0.1)$  calculée à l'étape précédente et ainsi de suite. Pour le tracé de  $\omega^-(\varepsilon)$ , on procède de la même manière mais cette fois on démarre le calcul de  $\omega^-(0.1)$  avec la donnée initiale  $\omega^0 = \frac{1}{2} - 0.1$ . On obtient ainsi le graphe de la figure 4 pour  $\omega^-$  et  $\omega^+$  lorsque  $\varepsilon \in [0, 10]$ .

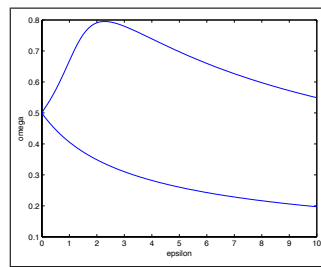


FIGURE 4. Tracé de  $\omega^-$  et  $\omega^+$ .

## Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
  - Expliquer le phénomène de résonance standard en calculant explicitement les solutions de l'équation (1).
  - Détailler la démonstration du théorème 2.
  - Faire le calcul numérique des courbes de stabilité partant du point  $(\omega, \varepsilon) = (1, 0)$ .
  - Redémontrer la formule (16) : prouver que  $\text{Tr}(R_1(2\pi)) = 0$  et qu'il est nécessaire de calculer  $\text{Tr}(R_2(2\pi))$  pour déterminer les courbes de stabilité au voisinage de  $(\omega, \varepsilon) = (\frac{1}{2}, 0)$ .
  - Faire le calcul du développement limité de  $\omega^\pm(\varepsilon)$  au voisinage de  $(\omega^\pm, \varepsilon) = (\frac{1}{2}, 0)$ .
  - Étudier, en calculant numériquement les solutions de  $\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon \cos(t)) \sin(x) = 0$ , le phénomène de résonance paramétrique pour l'équation (4).