Agrégation marocaine de Mathématiques, session 2024

Épreuve de modélisation et Calcul Scientifique

Propagation d'un virus

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

1 Propagation d'un virus dans une population

Il s'agit de l'étude d'un modèle de propagation d'un virus. On considère une population $\mathcal{P}$ d'individus, chacun pouvant être porteur d'un virus V . L'unité de temps étant fixée (minute, heure, jour, selon la situation), on note X_0 la variable aléatoire désignant le nombre d'individus de $\mathcal{P}$ porteurs de V à l'instant initial de l'étude, et plus généralement X_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus porteurs de V au bout de n unités de temps, n étant un entier naturel.
Dans tout ce problème, $\mathbb{E}(X)$ désigne, lorsqu'elle existe, l'espérance de la variable aléatoire X .

1.1 Modèle proportionnel

On propose d'étudier une situation où, à un instant donné n, l'agent contaminant responsable de la transmission de V peut être actif ou inactif (en raison de facteurs extérieurs qu'on ne cherche pas à étudier ici) : à tout instant n, on a la probabilité p qu'il soit actif, et la probabilité $1-p$ qu'il soit inactif, $p \in]0,1[$ étant fixé. On considère de ce fait une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre p, U_n valant 1 si l'agent est actif à l'instant n, et 0 s'il est inactif. On supposera de plus que les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, et que U_n est indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On convient que lorsque l'agent contaminant est actif à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'individus de $\mathcal{P}$ contaminés augmente d'un facteur $\alpha \in]0,1[$ entre les instants n et $n+1$, si bien qu'on a

$$\begin{cases} U_n = 1 \Longrightarrow X_{n+1} = (1+\alpha)X_n \\ U_n = 0 \Longrightarrow X_{n+1} = (1-\alpha)X_n \end{cases}$$

Le modèle est dit raisonnable si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée au sens suivant :

$$\mathbb{P}(\exists B \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n \leq B) = 1 \tag{1}$$

On admet que notre modèle est raisonnable.

($\mathbf{Q_1}$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Etablir que $X_n = (1+\alpha)^{U_{n-1}}(1-\alpha)^{1-U_{n-1}}X_{n-1}$

b) Justifier la formule suivante : $\mathbb{E}(X_n) = (1+(2p-1)\alpha)\mathbb{E}(X_{n-1})$.

c) Donner l'espérance de X_n en fonction de X_0.

d) En supposant $\mathbb{E}(X_0) > 0$, pour quelles valeurs de p a-t-on $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$?

e) Quelle contrainte en découle pour que le modèle étudié soit jugé raisonnable ?

($\mathbf{Q_2}$) On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$

a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Montrer que $X_n = (1+\alpha)^{S_n(1-\alpha)^{n-S_n}}X_0$.

c) Quelle est, en fonction de X_0, la valeur maximale M_n que peut prendre X_n ?

d) Si $X_0 > 0$, montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} M_n = +\infty$.

Remarque : le résultat précédent semble empêcher la possibilité que le modèle proposé soit raisonnable. Néanmoins, ce maximum M_n n'est atteint au rang n que si l'agent contaminant s'est montré actif lors des n premiers instants. Si p est faible et n est grand, la probabilité d'avoir une telle séquence est infime.

Forts de la remarque ci-dessus, nous cherchons dans la suite à quantifier de façon plus rigoureuse le risque que X_n devienne très grand, en évaluant la probabilité $\mathbb{P}(X_n > X_0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

($\mathbf{Q_3}$)

a) Montrer que $\mathbb{P}(X_n > X_0) = \mathbb{P}(S_n > n\theta(\alpha))$, où $\theta(\alpha) = \dfrac{-\ln(1-\alpha)}{\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)}$.

b) En déduire, en utilisant par exemple l'inégalité de Markov, que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)e^{-nt\theta(\alpha)}$$

Rappel de l'Inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire réelle sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(Z \geq 0) = 1$, alors

$$\forall\, a > 0,\ \mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}$$

c) Montrer que pour tout $t > 0$

$$\mathbb{P}(X_n > X_0) \leq e^{n\phi(t)}$$

où $\phi(t) = \ln(pe^t + (1-p)) - t\theta(\alpha)$

d) calculer $l := \lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \theta(\alpha)$.

e) On admettra dans la suite que α est suffisamment proche de 0 pour qu'on puisse prendre $\theta = l$ pour valeur approchée. On suppose que $p = \frac{1}{5}$

Montrer que ϕ atteint sur $\mathbb{R}_+^*$ un minimum $\lambda < 0$.

f) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(X_n > X_0)$? Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n > X_0)$$

Remarque : on peut démontrer l'équation (1) ; le modèle peut ainsi être considéré comme raisonnable pour les valeurs de p et de α choisies précédemment.

($\mathbf{Q_4}$) Une partie pratique.
Rédiger un algorithme que vous tester sur machine, qui permet de vérifier ce résultat. Il s'agit donc de générer une trajectoire de longueur (par exemple $m = 1000$) du processus $X = (X_n)$ et d'estimer la probabilité $\mathbb{P}(X_n > X_0)$ après avoir fixé une valeur pour X_0. Essayer différents scénarios en jouant sur les paramètres pour montrer le comportement du modèle proposé. Dresser des tableaux de résultats et des graphes pour la lisibilité des résultats obtenus en y incluant les commentaires nécessaires.

1.2 Modèle utilisant les matrices de transition

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{0\leq i,j\leq N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_{i,j}^{(n)}$ le coefficient de l'entrée (i, j) de la matrice A^n.
on dit que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $b_{i,j} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_{i,j}^{(n)}$ existe pour tout (i, j). Dans ce cas, on note

$$B = (b_{i,j})_{0\leq i,j\leq N} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} A^n.$$

On admettra les résultats suivants :

- si A et A' sont deux matrices carrées et P est une matrice carrée inversible de même taille telle que $A = PA'P^{-1}$, alors $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(A'^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et dans ce cas, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} A^n = P(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} A'^n)P^{-1}$
- si A est une matrice de taille $N + 1$ telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers B, U_0 un vecteur colonne à $N + 1$ composantes, et si $U_n = A^nU_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors les composantes de U_n convergent vers celles de BU_0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On suppose dans cette partie que la population $\mathcal{P}$ est de taille N. Le modèle suivant est fondé sur l'hypothèse d'un virus V peu dangereux (guérison rapide) mais fortement contagieux. On suppose que la propagation de V suit le schéma suivant : si l'on admet qu'à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ individus porteurs de V, et donc $N - i$ individus sains (non porteurs de V), alors

✓chacun des i porteurs devient sain à l'instant $n + 1$,

✓chacun des $N - i$ individus sains a une probabilité $p \in]0, 1[$ (indépendante de n et de i) de devenir porteur de V, de façon indépendante les uns des autres.

Pour $(i,j) \in \{0,1,\ldots,N\}^2$, on note $q_{i,j}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$ que $X_{n+1} = i$ sachant que $X_n = j$.

1.2.1 Traitement du cas $N = 2$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = (\mathbb{P}(X_n = i))_{i\in\{0,1,2\}}$ et $M = (q_{i,j})_{0\le i,j\le 2}$.

(Q₅)

a) Pour $j \in \{0,1,\ldots,N\}$, reconnaître la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_n = j$. En déduire que

$$M = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 1-p & 1 \\ 2p(1-p) & p & 0 \\ p^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrer, via la formule des probabilités totales, que $U_{n+1} = MU_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0 et d'une puissance de M.

c) Montrer que 1, $-p$ et p^2 sont les valeurs propres de M et déterminer des vecteurs propres associés.

d) Montrer que M est diagonalisable et donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.

e) Montrer que pour tout $k \in \{0,1,2\}$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ existe (donner sa valeur). Comment interpréter ce résultat en terme de propagation du virus ?

1.2.2 Vision endomorphisme

Dans le but de généraliser les résultats ci-dessus à une valeur quelconque de $N \in \mathbb{N}^*$, on interprètre M comme une matrice d'un endomorphisme d'un espace de polynômes. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_N[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N et ϕ l'endomorphisme de E dont la matrice, dans la base $(1, X, \ldots, X^N)$ de E, est M. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (\mathbb{P}(X_n = i))_{0\le i\le N}$.

(Q₆)

a) Montrer qu'en se restreignant au cas $N = 2$, on a $\phi(X^k) = (pX + 1 - p)^{2-k}$ pour tout $k \in \{0,1,\ldots,2\}$.

b) Donner sous forme factorisée trois polynômes (P_0, P_1, P_2) tels que $\phi(P_k) = (-1)^k P_k$ pour $k \in \{0,1,\ldots,2\}$.

c) Donner une expression des coefficients de la matrice M (à l'aide des coefficients binomiaux), ainsi qu'une relation entre U_n et U_0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrer que $\phi(X^k) = (pX + 1 - p)^{N-k}$ pour tout $k \in \{0,1,\ldots,N\}$

e) En s'inspirant de ce qui précède, quelle hypothèse peut-on faire sur les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de ϕ. Vérifier cette hypothèse par un calcul direct.

f) En déduire que M est diagonalisable, et donner la matrice diagonale D correspondante ($A = PDP^{-1}$, on ne demande pas d'expliciter la matrice P)

g) Donner un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

h) Montrer que $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque. Un calcul explicite de P et de P^{-1}, par exemple, permettrait de montrer que les composantes de U_n convergent (vous pouvez le vérifier dans le cas $N = 2$).

(Q₇) Une partie pratique.

Vous pouvez rédiger et exécuter un programme informatique permettant de suivre l'évolution des termes de la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter les résultats obtenus.