Agrégation marocaine de Mathématiques, session 2024

Épreuve de modélisation et Calcul Scientifique

Résumé : On s'intéresse au problème consistant à amener la solution d'un problème d'évolution d'un état initial donné à un état final désiré par la construction d'un terme de « contrôle » adéquat. On étudiera cette question dans le cadre d'un système différentiel d'origine mécanique et pour une équation aux dérivées partielles décrivant le transfert de chaleur.

Mots clefs : Interpolation. Équations différentielles. Équation de la chaleur. Développement en série entière.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.*

1. Deux masses et un ressort

Étudions le système mécanique à deux degrés de liberté représenté à la figure 1 : deux masses m_1 et m_2 sont en translation sur un axe et sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, une force extérieure u agit sur la première masse. Nous obtenons donc le système dynamique suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1 x_1'' & = & k(x_2 - x_1) + u, \\ m_2 x_2'' & = & k(x_1 - x_2). \end{array}\right. \tag{1}$$

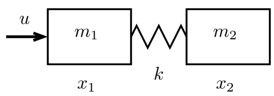

FIGURE 1. Système masse-ressort.

Soient un temps $T > 0$, un quadruplet de positions/vitesses initiales $(x_1^0, v_1^0, x_2^0, v_2^0)$ et un quadruplet de positions/vitesses finales $(x_1^T, v_1^T, x_2^T, v_2^T)$. Nous souhaitons calculer une force u à appliquer pour que la solution de (1) avec condition initiale

$$x_1(0) = x_1^0\,, \quad x_1'(0) = v_1^0\,, \qquad x_2(0) = x_2^0\,, \quad x_2'(0) = v_2^0\,, \tag{2}$$

satisfasse au temps T la condition finale

$$x_1(T) = x_1^T\,, \quad x_1'(T) = v_1^T\,, \qquad x_2(T) = x_2^T\,, \quad x_2'(T) = v_2^T\,. \tag{3}$$

C'est ce qu'on appelle un « problème de contrôle ». Pour étudier ce problème, nous allons réécrire le système dynamique (1) en fonction de $y := x_2$. Nous obtenons :

$$x_1 = \frac{m_2}{k} y'' + y, \qquad x_2 = y, \qquad u = \frac{m_1 m_2}{k} y^{(4)} + (m_1 + m_2) y''. \tag{4}$$

Pour calculer u de façon à satisfaire les conditions (2) et (3), il suffit donc de trouver $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\text{pour } s = 0 \text{ et } s = T, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{m_2}{k} y''(s) + y(s) & = & x_1^s, \\ \frac{m_2}{k} y^{(3)}(s) + y'(s) & = & v_1^s, \\ y(s) & = & x_2^s, \\ y'(s) & = & v_2^s, \end{array} \right. \tag{5}$$

ce qui revient à chercher une fonction régulière telle que les conditions (5) soient satisfaites. Nous sommes donc ramenés à un problème d'interpolation. En général, il existe de nombreuses fonctions qui vérifient ces conditions. Un exemple est fourni par l'énoncé suivant.

Proposition 1. *Si $m_1 = m_2 = T = k = 1$, alors pour tout $(x_1^0, v_1^0, x_2^0, v_2^0, x_1^T, v_1^T, x_2^T, v_2^T)$ dans $\mathbb{R}^8$, il existe une unique fonction polynomiale y de degré inférieur ou égal à 7 telle que les conditions* (5) *soient satisfaites.*

Une fois qu'on a déterminé la fonction y, on cherche ensuite à calculer la force u qu'il convient d'appliquer au système pour que la solution (x_1, x_2) de (1) satisfasse (2) et (3). Pour cela, il suffit d'utiliser (4) et de calculer, pour $t \in [0, T]$,

$$u(t) = \frac{m_1 m_2}{k} y^{(4)}(t) + (m_1 + m_2) y''(t) \,. \tag{6}$$

On peut interpréter la force u comme un contrôle qu'il faut appliquer au système (1) pour passer d'un état initial à un état final prescrits. Bien sûr, avec les hypothèses de la proposition 1, il existe d'autres fonctions que les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 7 qui vérifient (5).

2. Phénomène de diffusion

Nous allons essayer de suivre une démarche similaire dans le cadre d'équations aux dérivées partielles. Nous considérons un phénomène de diffusion de la chaleur dans un tube de longueur 1. On néglige tout effet de propagation dans les directions transverses, et on note $S(t, x)$ la température au point d'abscisse x au temps t. On a

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x) \qquad \text{pour } t > 0,\ x \in]0, 1[. \tag{7}$$

Les unités de travail sont telles que la diffusion thermique vaut 1 ; les conditions aux bords sont

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, x = 0) = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial x}(t, x = 1) = u(t) \qquad \text{pour } t > 0, \tag{8}$$

où u désigne le flux de chaleur entrant dans le tube en $x = 1$. La température initiale vaut

$$S(0,x) = S^0(x) \quad \text{pour } x \in [0,1]. \tag{9}$$

Pour tout u dans $\mathscr{C}^2([0,T])$ et S^0 dans $\mathscr{C}^2([0,1])$, on peut établir l'existence et l'unicité d'une solution de (7) dans $\mathscr{C}^2(]0,T] \times [0,1])$ vérifiant (8) et (9).

Nous souhaitons maintenant amener, en temps $T > 0$, la solution S de (7)–(8) d'une configuration initiale donnée $S^0 : x \in [0,1] \mapsto S^0(x)$, à une configuration cible $S^T : x \in [0,1] \mapsto S^T(x)$, en choisissant convenablement le flux de chaleur $u(t)$ au bord $x = 1$. L'objectif de cette section est un calcul formel des solutions de (7)–(8), permettant de reformuler ce problème de contrôle sous forme d'un problème d'interpolation, comme en section 1. La justification rigoureuse sera abordée en section 4, une fois discutée la résolution du problème d'interpolation à la section 3.

On cherche, formellement, à exprimer la solution de (7) sous forme d'une série entière par rapport à x :

$$S(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) \frac{x^i}{i!}. \tag{10}$$

On a alors la formule de récurrence $a_{i+2} = \frac{da_i}{dt}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Les conditions aux bords imposent

$$a_{2i+1} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

En notant $y(t) = S(t,0)$, nous obtenons un paramétrage de S et de u en fonction de y,

$$S(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t) \frac{x^{2i}}{(2i)!}, \qquad u(t) = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x=1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i-1)!}, \tag{12}$$

c'est pourquoi nous dirons que la variable y est *la sortie* de (7). Si S^0 et S^T sont de la forme

$$S^0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^0\, x^{2i}, \qquad S^T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^T\, x^{2i}, \tag{13}$$

alors le problème de contrôle se reformule comme un problème d'interpolation infini :

$$y^{(i)}(0) = q_i^0\,(2i)! \qquad \text{et} \qquad y^{(i)}(T) = q_i^T\,(2i)!, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Nous allons proposer une approximation du problème qui fournit une solution ne satisfaisant les conditions initiale et finale qu'approximativement. Plus précisément, soient S^0 et S^T deux fonctions définies sur $[0,1]$ et de carré intégrable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes

$$P^0(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i^0\, x^{2i} \qquad \text{et} \qquad P^T(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i^T\, x^{2i}, \tag{15}$$

tels que

$$\|S^0 - P^0\|_{L^2(0,1)} \le \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|S^T - P^T\|_{L^2(0,1)} \le \varepsilon. \tag{16}$$

Si la fonction y résout le problème d'interpolation

$$y^{(i)}(0) = p_i^0(2i)! \qquad \text{et} \qquad y^{(i)}(T) = p_i^T(2i)!, \qquad \forall i \in \{0,\dots,n\}, \tag{17}$$

alors la solution de (7)–(8) associée à la condition initiale $S(0,x) = P^0(x)$ et au flux $u(t) = \sum_{i=1}^n y^{(i)}(t)/((2i-1)!)$ satisfait $S(T,x) = P^T(x)$. Nous verrons plus loin une méthode pratique pour calculer P^0 et P^T. Enfin, on peut montrer qu'avec ce même choix pour la fonction u, la solution de (7) avec les conditions aux bords (8) et la condition initiale S^0 est, au temps T, proche de S^T.

Nous allons maintenant proposer une méthode pour résoudre le problème d'interpolation (17). Étant donné $\sigma > 0$, nous pouvons définir la fonction « cloche »

$$\varphi_\sigma(t) = 0 \text{ si } t \notin]0,1[, \qquad \varphi_\sigma(t) = \exp\left(\frac{-1}{((1-t)t)^\sigma}\right) \text{ si } t \in]0,1[, \tag{18}$$

ainsi que la fonction « plateau »

$$\Phi_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0, \\ 1 & \text{si } t \ge 1, \\ \left(\int_0^1 \varphi_\sigma(\tau)d\tau\right)^{-1} \int_0^t \varphi_\sigma(\tau)d\tau & \text{si } t \in]0,1[. \end{cases} \tag{19}$$

Les fonctions φ_2 et Φ_2 sont représentées sur la figure 2. Remarquons que la fonction plateau Φ_σ est strictement croissante de la valeur 0 à la valeur 1, régulière et toutes ses dérivées sont nulles en $t = 0$ et en $t = 1$. Ainsi la fonction

$$y(t) = \sum_{i=0}^n \left[p_i^0 \frac{t^i}{i!}\left(1 - \Phi_\sigma\left(\frac{t}{T}\right)\right) + p_i^T \frac{(t-T)^i}{i!} \Phi_\sigma\left(\frac{t}{T}\right)\right](2i)! \tag{20}$$

est solution du problème d'interpolation (17).

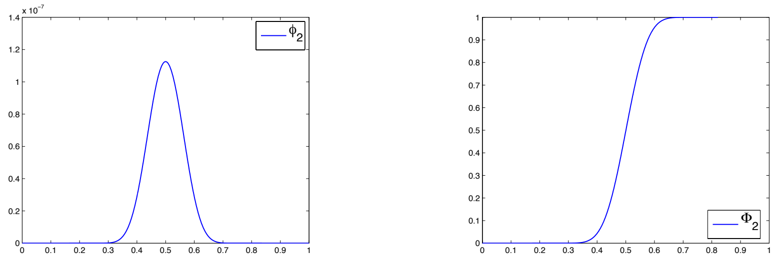

FIGURE 2. Fonctions φ_2 (à gauche) et Φ_2 (à droite).

3. Mise en œuvre

Revenons sur le problème du calcul de P^0 et P^T et du contrôle u. En pratique, on peut par exemple déterminer les polynômes P^0 et P^T comme étant les projections orthogonales, au sens du produit scalaire L^2, de S^0 et S^T respectivement, sur le sous-espace engendré par les fonctions $1, x^2, \dots, x^{2n}$. Les coefficients $p_0^0, \dots, p_n^0, p_0^T, \dots, p_n^T$ peuvent alors être obtenus comme solutions d'un système linéaire de la forme

$$(21) \qquad Ap = s, \qquad A_{ij} = \frac{1}{2(i+j)+1}, \qquad s_i = \int_0^1 x^{2i} S(x)\,\mathrm{d}x, \qquad 0 \le i, j \le n.$$

La figure 3 donne un exemple de telles approximations. L'approche naïve présentée ici peut conduire à des difficultés pratiques sévères, liées au très mauvais conditionnement de la matrice A ainsi construite, et des approches plus sophistiquées doivent être exploitées.

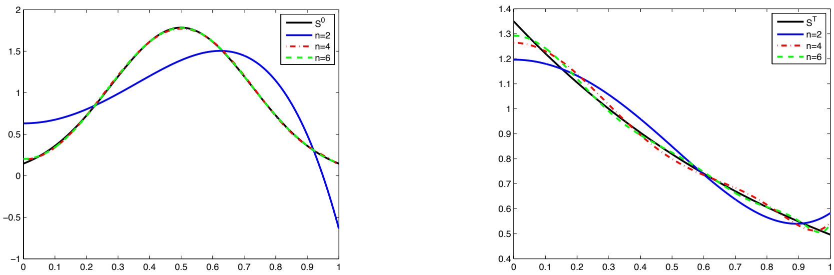

FIGURE 3. Approximations de $S^0(x) = \frac{e^{-(x-0.5)^2/0.1}}{\sqrt{0.1\pi}}$ (à gauche) et $S^T(x) = e^{-(x-0.3)}$ (à droite), avec $n = 2$ (pointillés), $n = 4$ (traits-pointillés), $n = 6$ (traits).

Pour calculer la fonction de contrôle u en utilisant la méthode présentée à la section 2, on est aussi confronté à la question du calcul des dérivées successives de la fonction y. On peut chercher à obtenir des formules explicites et à exhiber des formules de récurrence, mais un tel calcul se révèle vite fastidieux. On va donc plutôt essayer d'utiliser de nouvelles approximations à partir d'évaluations de y sur un ensemble discret de temps $\{t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \ldots, t_N = N\Delta t = T\}$, qu'on note $\{y_0, \ldots, y_N\}$. L'idée consiste à approcher $y^{(i)}(t_k)$ en utilisant $i+1$ de ces valeurs, choisies sur des instants voisins de t_k. Par exemple $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2\Delta t}$ et $\frac{y_{k+1}+y_{k-1}-2y_k}{\Delta t^2}$ fournissent des approximations de $y'(t_k)$ et $y''(t_k)$ respectivement, qu'on peut déjà utiliser lorsque le degré $2n$ des polynômes d'approximation reste inférieur à 4. Notons toutefois que les points de bord n'ont pas de voisins à leur droite ou à leur gauche et qu'il faut y adapter ces formules. Finalement, le contrôle u étant ainsi construit, on peut valider la méthode en simulant numériquement le problème (7)–(9), par exemple à l'aide d'une méthode de différences finies (voir figure 4).

4. Fonction de classe Gevrey

L'objectif de ce paragraphe est de proposer une justification de l'approche formelle développée en section 2. Nous allons voir qu'une condition suffisante de convergence pour les séries (12) peut être donnée en terme d'ordre de Gevrey de la fonction y.
Une fonction infiniment dérivable $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est dite *Gevrey d'ordre* $a \in [1, +\infty)$ si

$$(22) \qquad \exists M, R > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(t) \right| \le M \frac{(n!)^a}{R^n}.$$

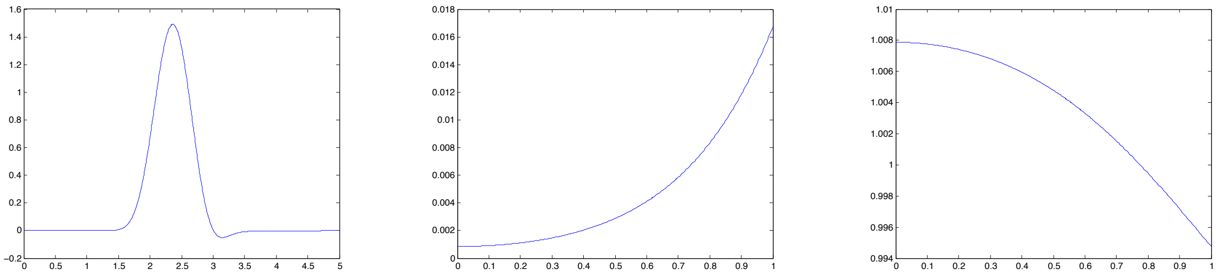

FIGURE 4. Donnée initiale nulle, donnée finale $S^T(x) = 1$, $T = 5$: contrôle $t \mapsto u(t)$ (à gauche), solution $x \mapsto S(t,x)$ à $t = 1.66$ et $t = 3.33$.

Notons que l'ensemble des fonctions de Gevrey est stable par multiplication par un réel, produit, dérivation et primitive. Étant donné $\sigma > 0$, nous admettrons que la fonction « cloche » φ_σ est Gevrey d'ordre $1 + 1/\sigma$.

Pour les fonctions de deux variables, on procède ainsi : une fonction infiniment dérivable $f : (t,x) \in [0,1] \times [0,T] \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est dite *Gevrey d'ordre a en t et d'ordre b en x* si

$$\exists M, R, S > 0, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{(t,x)\in[0,1]\times[0,T]} \left| \frac{\partial^{k+n} f}{\partial x^k \partial t^n}(t,x) \right| \le M \frac{(n!)^a (k!)^b}{R^n S^k}. \tag{23}$$

On peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Si y est Gevrey d'ordre* $\alpha \in [1,2[$, *alors les séries* (12) *convergent simplement sur* $[0,T] \times [0,1]$ *; S est Gevrey d'ordre* α *en t, Gevrey d'ordre* 1 *en x et solution de* (7)-(8).

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

— Détailler les éléments de démonstration de la proposition 1.
— Calculer un polynôme u tel que la solution de (1) satisfasse les conditions initiale (2) et finale (3) avec $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1$, $v_1^0 = 0$, $v_2^0 = 0$, $x_1^T = 2$, $x_2^T = 3$, $v_1^T = 0$, $v_2^T = 0$ et $T = 1$.
— Justifier, en supposant qu'il existe une solution $\mathscr{C}^\infty$ de (7), l'approximation par les polynômes pairs qui est utilisée dans la section 2.
— Commenter et mettre en œuvre la construction de la fonction y décrite aux sections 2 et 3.
— Simuler numériquement le problème (7)–(9) pour un flux u donné, puis pour le contrôle obtenu par la méthode interpolation.
— Discuter comment pourraient être calculées les dérivées d'ordre supérieur de y.
— Démontrer le théorème 1 en utilisant la formule de Stirling et l'inégalité $(l+k)! \le 2^{l+k}\, l!\, k!$ pour tout $(l,k) \in \mathbb{N}^2$.