

**Résumé :** L'objectif de ce texte est de calculer la position optimale d'une charge suspendue à une corde afin de minimiser les risques de rupture de ses points d'attache. Le modèle de base est constitué d'une équation aux dérivées partielles linéaire en dimension 1 dont le terme source dépend d'un paramètre. On cherche alors à trouver la valeur optimale de ce paramètre à travers une méthode de gradient.

**Mots clés :** Équations aux dérivées partielles. Problème aux limites. Optimisation. Méthodes de gradient. Différences finies.

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

## 1. Le problème de la corde à l'équilibre

On considère une corde tendue attachée à ses deux extrémités et initialement en position horizontale à laquelle on suspend une charge. L'objectif est que sa présence n'entraîne pas la rupture des points d'attache. Pour cela, on cherche donc à déterminer sa position le long de la corde pour minimiser la force de tension que l'on va retrouver aux extrémités de celle-ci. Il va de soi qu'il s'agit là d'un problème extrêmement simplifié (bien que de même nature) par rapport aux problèmes concrets des ingénieurs qui étudient par exemple les risques de rupture des ponts, des ailes d'avion, etc.

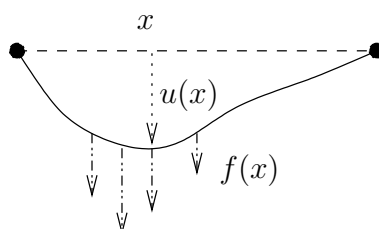


FIGURE 1. Géométrie d'une corde à l'équilibre soumise à un champ de forces  $f$ .

On se place dans le cas monodimensionnel et avec une corde de longueur 1 ; les abscisses sont décrites par  $x \in ]0, 1[$  et  $x \mapsto u(x)$  représente le déplacement vertical de la corde par

rapport au repos lorsque la charge  $y$  est suspendue. Le champ de forces exercé sur la corde par le poids de la charge est représenté par une densité linéique  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , comme sur la figure 1. On supposera de plus que la corde est fixée à ses extrémités, ce que l'on traduit par les conditions  $u(0) = u(1) = 0$ .

Pour décrire le modèle, on va faire un bilan d'énergie sur un élément de longueur  $dx$ , en faisant l'hypothèse de petits déplacements. Pour cela on procède en deux étapes :

a) L'énergie infinitésimale due à l'étirement de l'élément de corde est proportionnelle à l'augmentation de la longueur entre la situation au repos et la corde en tension :

$$(1) \quad \xi_1 = k(x) \left( \sqrt{(u(x+dx) - u(x))^2 + dx^2} - dx \right) \approx k(x) \left( \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2 + 1} - 1 \right) dx.$$

Le coefficient de proportionnalité  $k(x) > 0$  s'appelle la raideur de la corde au point  $x$ .

b) L'énergie potentielle due au poids de l'objet et qui est l'opposée du travail de ce poids au cours du déplacement décrit par  $u$  vaut :

$$(2) \quad \xi_2 = -f(x)u(x) dx.$$

L'énergie globale  $E(u)$  est donnée par :

$$(3) \quad \int_0^1 k(x) \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2} - 1 \right) dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx,$$

ce qui, en supposant que le déplacement  $u$  et sa dérivée sont petits, donne en première approximation :

$$(4) \quad E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx.$$

La configuration  $u$  de la corde à l'équilibre est l'unique fonction vérifiant les conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$  et qui minimise l'énergie  $E$ . En effet, on **admettra** le résultat suivant (il n'est pas demandé au candidat de le démontrer).

**Théorème 1.** Soient  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ ,  $k \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$  telle que  $\inf_{[0,1]} k > 0$  alors :

$$(5) \quad \exists! u \in V, \quad \forall v \in V, \quad E(u) \leq E(v),$$

avec  $V = \{v \in \mathcal{C}^2([0, 1]) / v(0) = v(1) = 0\}$ .

**Corollaire 1.** Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1, l'unique solution du problème (5) est aussi solution du problème aux limites :

$$(6) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Pour démontrer ce corollaire, on constate que  $E(u + t\varphi) \geq E(u)$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  et  $\forall \varphi \in V$ . En développant l'expression par rapport à  $t$ , puis en faisant tendre  $t$  vers  $0^+$  d'une part, puis  $t$  vers  $0^-$  d'autre part, on obtient l'égalité :

$$(7) \quad \forall \varphi \in V, \quad \int_0^1 k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

Ainsi par une intégration par parties, il vient

$$(8) \quad \forall \varphi \in V, \quad - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right) \varphi(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx.$$

On conclut alors que  $u$  est bien solution du système (6).

Une fois que l'on a déterminé la position d'équilibre de la corde, on admet que les forces exercées par la corde en tension sur ses deux points d'attache sont respectivement données par

$$(9) \quad F_0 = k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0) \quad \text{et} \quad F_1 = k(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1),$$

et on peut donc mesurer les risques de rupture, c'est-à-dire l'intensité de ces deux forces, par exemple en évaluant la quantité suivante, appelée **risque de rupture**

$$(10) \quad R = \frac{1}{2} \left| k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| k(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1) \right|^2,$$

où  $u$  est la solution du problème (6).

## 2. Optimisation de la position de la charge

On se donne  $p \in \mathcal{C}_c^0(\mathbf{R})$  à support dans  $[-\ell, \ell]$  avec  $0 < \ell < \frac{1}{2}$  qui représente le poids de la charge de longueur  $2\ell$  avec laquelle on va travailler. On choisira typiquement des fonctions  $p$  négatives ce qui correspond à l'orientation usuelle de la gravité "vers le bas". On repère alors par  $a \in [\ell, 1 - \ell]$  la position du *centre* de la charge, ce qui revient à dire que la corde est soumise au champ de force  $f^a$  défini par  $f^a(x) = p(x - a)$ .

Ainsi, à chaque valeur de  $a$  on associe, par le théorème 1, une unique solution notée  $u^a$  du problème (6) avec pour second membre, la fonction  $f^a$ . On peut alors, toujours pour chaque valeur de  $a$ , calculer l'énergie de rupture associée

$$(11) \quad R(a) = \frac{1}{2} \left| k(0) \frac{\partial u^a}{\partial x}(0) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| k(1) \frac{\partial u^a}{\partial x}(1) \right|^2.$$

L'objectif que l'on se fixe est donc de trouver la valeur de  $a$  qui va minimiser la fonctionnelle  $R$  et ainsi les risques de rupture des attaches de la corde.

Dans le cadre général, le calcul explicite de  $R(a)$  n'est pas possible et, quand bien même on pourrait la calculer,  $R$  n'est plus nécessairement quadratique. On va présenter maintenant une méthode numérique pour déterminer une solution approchée du problème (6) et obtenir ainsi une approximation de la fonction  $R$  que l'on cherchera à minimiser par la suite.

## 2.1. Calcul approché de la position de la corde

Pour tout paramètre  $a \in ]\ell, 1 - \ell[$ , on utilise une méthode de différences finies pour l'équation (6) avec second membre  $f^a$ . Plus précisément, pour un entier  $N$  fixé et  $h = \frac{1}{N+1}$ , on pose  $x_i = ih$ ,  $0 \leq i \leq N+1$ , on cherche une approximation  $u_i^a$  de la valeur de  $u^a$  au point  $x_i$ , définie par le schéma :

$$(12) \quad \begin{cases} u_0^a = u_{N+1}^a = 0, \\ -\frac{1}{h} \left( k_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^a - u_i^a}{h} - k_{i-1/2} \frac{u_i^a - u_{i-1}^a}{h} \right) = f^a(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases}$$

avec  $k_{i+1/2} = k \left( i + \frac{1}{2} \right) h$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, N\}$ . Une telle approximation  $U^a = {}^t(u_1^a, \dots, u_N^a) \in \mathbf{R}^N$  existe de façon unique et s'obtient par la résolution du système linéaire :

$$(13) \quad MU^a = F^a$$

avec  $F^a = {}^t(f^a(x_1), \dots, f^a(x_N))$  et  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$  où

$$(14) \quad \begin{cases} m_{i,j} = 0 & \text{pour tout } (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \text{ tel que } |i - j| > 1, \\ m_{i,i+1} = -\frac{k_{i+1/2}}{h^2} & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N-1\}, \\ m_{i,i-1} = -\frac{k_{i-1/2}}{h^2} & \text{pour tout } i \in \{2, \dots, N\}, \\ m_{i,i} = \frac{k_{i+1/2} + k_{i-1/2}}{h^2} & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

## 2.2. Calcul de l'énergie de rupture et de sa dérivée

Dans un deuxième temps, à  $N$  fixé, on propose de minimiser, par rapport à  $a$ , la fonctionnelle approchant  $R$  définie par :

$$(15) \quad \begin{aligned} R_N(a) &= \frac{1}{2} \left( k_{1/2} \frac{u_1^a - u_0^a}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( k_{N+1/2} \frac{u_{N+1}^a - u_N^a}{h} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( k_{1/2} \frac{u_1^a}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( k_{N+1/2} \frac{u_N^a}{h} \right)^2. \end{aligned}$$

Pour déterminer une valeur approchée du minimum, on se propose d'utiliser une méthode de gradient à pas constant  $\rho$ , ce qui suppose de pouvoir évaluer la dérivée de  $R_N$  en tout point. Pour cela, on suppose dorénavant que  $p$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et on remarque que la dérivée de  $R_N$  s'écrit de la façon suivante :

$$(16) \quad R'_N(a) = k_{1/2}^2 \frac{u_1^a v_1^a}{h^2} + k_{N+1/2}^2 \frac{u_N^a v_N^a}{h^2},$$

où  $V^a = {}^t(v_1^a, \dots, v_N^a)$  est l'unique solution du système linéaire

$$(17) \quad MV^a = G^a,$$

avec

$$(18) \quad G^a = {}^t \left( \frac{\partial f^a}{\partial a}(x_1), \dots, \frac{\partial f^a}{\partial a}(x_N) \right) = -{}^t(p'(x_1 - a), \dots, p'(x_N - a)).$$

Ainsi, le calcul de  $R_N$  et  $R'_N$  en tout point  $a$  s'effectue de façon exacte *via* la résolution de deux systèmes linéaires pour la même matrice  $M$ . Pour les essais numériques, on pourra choisir une fonction  $p$  de type gaussien  $p(x) = -\lambda \exp(-(\lambda x)^2)$ , avec  $\lambda > 0$  bien choisi. Bien entendu cette fonction n'est pas à support compact mais elle est quand même suffisamment localisée en espace pour valider l'approche proposée.

### 2.3. Minimisation par l'algorithme de gradient à pas constant

La méthode de gradient à pas constant pour minimiser  $R_N$  est décrite par :

$$(19) \quad \begin{cases} a^0 & \text{donné,} \\ a^{k+1} & = a^k - \rho R'_N(a^k), \forall k \in \mathbf{N}, \\ \text{s'arrêter} & \text{quand } |R'_N(a^k)| \leq 10^{-6}. \end{cases}$$

Pour peu que l'on choisisse correctement le pas de descente  $\rho$  (ni trop petit, ni trop grand...), on peut vérifier numériquement que la méthode converge. Pour les simulations numériques, on pourra prendre  $k(x) = 1 + 0.8 \sin(10x) \cos(5x)$  (qui modélise des variations de tension importantes dans la corde).

Dans le cas présenté ici, pour  $N = 100$ , la méthode de gradient à pas constant avec  $\rho = 0.04$  et  $a^0 = 0.5$  converge en 10 itérations vers la valeur  $a \approx 0.6666$  et une énergie de rupture minimale  $R_N(a) \approx 1.5708$ . Les résultats sont donnés dans la figure 2.

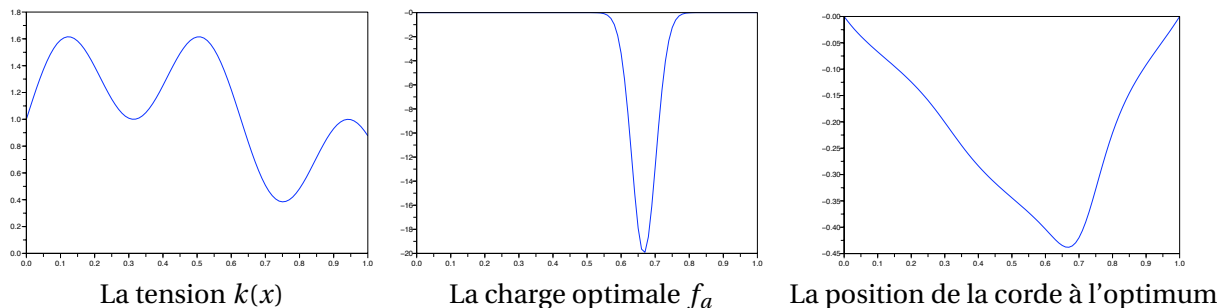


FIGURE 2. Position optimale de la charge, i.e. pour  $a \approx 0.6666$ .

On donne également dans la figure 3 la courbe de la fonction  $R_N$  pour des valeurs de  $a$  dans  $[0.1, 0.9]$ . On observe qu'elle n'est effectivement plus quadratique et que l'on a bien trouvé son minimum au point  $a \approx 0.6666$ .

### Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très*

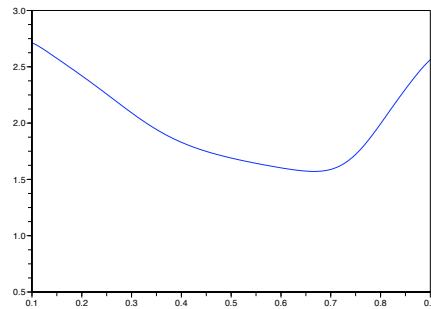


FIGURE 3. L'énergie  $R^N$ , pour  $N = 100$ .

*vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Détailler la preuve du corollaire 1. Justifier les calculs de la section 2.
- Vérifier que si  $k$  est une fonction constante, alors la fonctionnelle  $R$  est quadratique, pour tout choix de la fonction  $p$  à support dans  $[-\ell, \ell]$ .
- On pourra retrouver numériquement les figures 2 et 3 du texte.
- On pourra commenter la méthode de gradient utilisée, discuter le choix du pas de descente, et éventuellement en proposer des alternatives.