

Résumé : Ce texte propose une modélisation simple sous forme de système linéaire de l'impact de la publicité sur une population de consommateurs. On s'intéresse à une méthode itérative de résolution exploitant la structure particulière de la matrice.

Mots clés : Algèbre linéaire. Méthodes itératives.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Un modèle discret pour mesurer l'effet de la publicité

Le but de ce texte est de proposer une modélisation élémentaire de la notoriété d'une entreprise commerciale, en lien avec la publicité qu'elle effectue de manière ciblée auprès de certains consommateurs. On note \mathcal{C} l'ensemble (fini) des consommateurs potentiels et, pour $c \in \mathcal{C}$, le nombre réel positif X_c correspond à l'opinion que se fait le consommateur c de l'entreprise (un nombre X_c élevé traduit une image positive). En l'absence d'opération publicitaire, on admet que l'avis d'un consommateur est égal à la moyenne de ceux de ses voisins :

$$(1) \quad X_c = \frac{1}{|\mathcal{V}_c|} \sum_{v \in \mathcal{V}_c} X_v,$$

où $|\cdot|$ désigne le cardinal et \mathcal{V}_c l'ensemble des voisins de c (à comprendre en un sens très large : géographique, familial, professionnel...).

À l'inverse, si les consommateurs sont isolés les uns des autres, on suppose que leur avis dépend directement de la publicité qu'ils reçoivent : $X_c = p_c$, où p_c est l'intensité de la publicité dirigée sur le consommateur c .

Dans la suite, on considère le cas simplifié où le voisinage est seulement géographique, et la population constituée de $N + 2$ consommateurs situés sur un segment, voir Figure 1. Sous les hypothèses décrites plus haut, on obtient les équations suivantes, en notant $x_i = X_{c_i}$ et $p_i = p_{c_i}$:

$$(2) \quad x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} + p_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{et} \quad x_0 = x_{N+1} = 0.$$



FIGURE 1. Positions relatives des consommateurs.

Les deux dernières égalités traduisent le fait que les consommateurs aux deux extrémités des segments sont hermétiques aux avis de leurs voisins, et ne sont pas concernés par la publicité. Bien sûr, cette modélisation est naïve et peut être critiquée à bien des égards. Si x et b désignent les vecteurs de \mathbb{R}^N de coordonnées (x_i) et $(2p_i \times (N+1)^2)$, alors les équations (2) se ramènent à la résolution du système linéaire $A_N x = b$, où la matrice $A_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est donnée par

$$(3) \quad A_N = (N+1)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note x^* la solution de ce système linéaire. Lorsque la taille N de la matrice est très grande, la résolution directe du système linéaire peut s'avérer coûteuse; on peut lui préférer une méthode itérative. Considérons la méthode de Jacobi relaxée, qui s'écrit, pour $\omega > 0$,

$$(4) \quad x^{k+1} = J_\omega x^k + \frac{\omega b}{2(N+1)^2} \quad \text{avec } J_\omega = \left(I_N - \frac{\omega}{2(N+1)^2} A_N \right).$$

Pour analyser la performance de cette méthode, il suffit de considérer le cas $b = 0$. On peut montrer que $A_N z_N^{(\ell)} = \lambda_N^{(\ell)} z_N^{(\ell)}$ avec

$$(5) \quad z_N^{(\ell)} = {}^t(\sin(\ell H), \sin(2\ell H), \dots, \sin(N\ell H)), \quad \lambda_N^{(\ell)} = \frac{4\pi^2}{H^2} \sin^2\left(\frac{\ell H}{2}\right),$$

où $H = \pi/(N+1)$. Ainsi, si x^0 se décompose sur la base des vecteurs propres de A_N

$$(6) \quad x^0 = \sum_{\ell=1}^N \alpha_\ell z_N^{(\ell)},$$

alors x^k admet la décomposition

$$(7) \quad x^k = \sum_{\ell=1}^N \alpha_\ell \left(1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\ell H}{2}\right) \right)^k z_N^{(\ell)}.$$

Ainsi, la méthode converge dès que $0 < \omega \leq 1$. Toutefois, en considérant que $N \gg 1$, le coefficient $1 - 2\omega \sin^2(\ell H/2)$ est très proche de 1 pour ℓ petit (basses fréquences). On peut voir, en revanche, que ce coefficient peut être maintenu loin de 1 pour les hautes fréquences.

En effet, si l'on choisit $\omega = \frac{1}{2}$, et si $x^0 = \sum_{\ell=\frac{N+1}{2}}^N \alpha_\ell z_N^{(\ell)}$, alors, pour la norme euclidienne, on a

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{2^k} \|x^0 - x^*\|.$$

Cette propriété de la méthode de Jacobi relaxée est nommée *effet régularisant*, que l'on observe sur la figure 2. Ainsi, si l'on couple cette méthode avec une méthode qui permet d'approcher correctement les basses fréquences, on peut espérer obtenir de très bonnes performances.

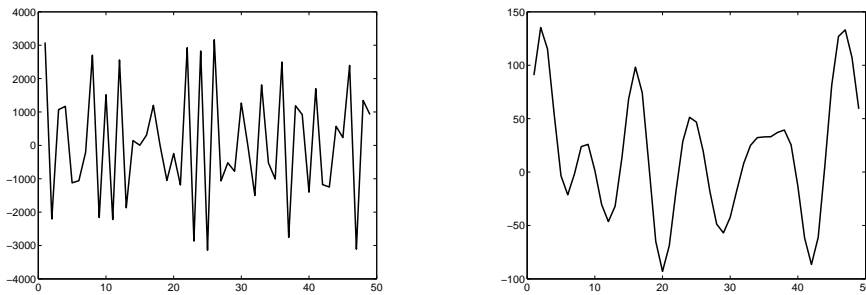


FIGURE 2. À gauche : coordonnées du vecteur $A_N x^0 - b$. À droite : coordonnées du vecteur $A_N x^k - b$ pour $k = 10$ ($\omega = \frac{1}{2}$ et $N = 49$) (x^0 est choisi aléatoirement).

Au vu de la figure 2, on s'aperçoit qu'après quelques itérations de la méthode de Jacobi relaxée, le résidu $A_N x^k - b$ obtenu a des variations lentes, qui peuvent être raisonnablement approchées avec un plus petit nombre de points. Il paraît donc opportun d'utiliser une résolution à un niveau plus grossier, c'est-à-dire avec une plus petite valeur de N .

Dans toute la suite, l'entier N est supposé impair et n désigne $(N - 1)/2$.

2. Opérateurs de restriction et d'extension

Si l'on souhaite utiliser des résolutions faisant intervenir plusieurs niveaux, il est nécessaire de savoir les faire communiquer entre eux. On introduit les matrices $R \in \mathcal{M}_{n,N}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{N,n}(\mathbb{R})$

$$(8) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & 2 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si $V \in \mathbb{R}^N$, RV est la restriction de V à \mathbb{R}^n telle que $(RV)_i = V_{2i}$. De manière similaire, si $v \in \mathbb{R}^n$, Ev est l'extension de v à \mathbb{R}^N telle que

$$(9) \quad (Ev)_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(v_{\frac{i-1}{2}} + v_{\frac{i+1}{2}} \right) & \text{si } i \text{ est impair,} \\ v_{\frac{i}{2}} & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

On vérifie aisément que le produit RE est égal à l'identité. La figure 3 donne un aperçu de l'effet de l'opérateur ER , indiquant un comportement proche de l'identité pour $\ell \leq n$.

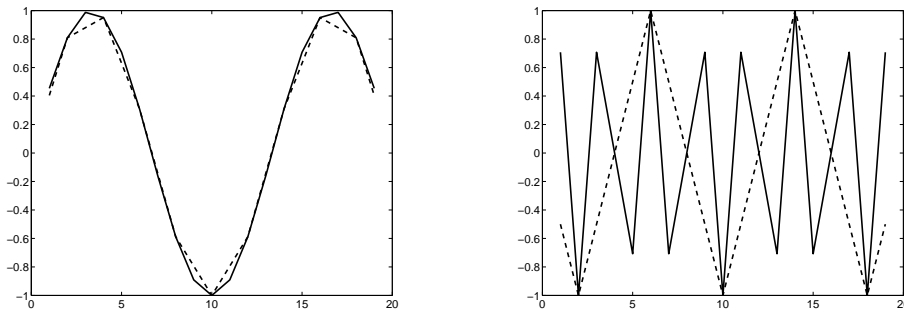


FIGURE 3. Coordonnées de $z_N^{(\ell)}$ (trait plein) et $ERz_N^{(\ell)}$ (pointillés) pour $N = 19$ et $\ell = 3$ (gauche), $\ell = 15$ (droite).

Par ailleurs, les égalités suivantes sont valables pour les vecteurs propres de A_N et A_n :

$$(10) \quad Rz_N^{(\ell)} = \begin{cases} z_n^{(\ell)} & \text{si } \ell \leq n, \\ 0 & \text{si } \ell = n + 1, \\ -z_n^{(N+1-\ell)} & \text{si } \ell > n + 1. \end{cases}$$

$$(11) \quad Ez_n^{(\ell)} = \cos^2\left(\frac{\ell H}{2}\right) z_N^{(\ell)} - \sin^2\left(\frac{\ell H}{2}\right) z_N^{(N+1-\ell)}.$$

3. Une méthode à deux niveaux

Dans la partie 1, on a présenté la méthode de Jacobi relaxée, qui permet d'approcher correctement les hautes fréquences. On vient de voir dans la partie 2 que l'utilisation d'une grille deux fois moins fine permet d'effectuer le même travail sur les basses fréquences. On va ici réunir les deux approches pour obtenir une méthode performante globalement.

Algorithme 1. On part d'un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^N$ quelconque.

Pour $k = 0, 1, \dots$, faire

(1) On effectue q étapes de la méthode de Jacobi relaxée :

On pose $a^0 = x^k$.

Pour $j = 1, \dots, q$,

$$a^j = J_\omega a^{j-1} + \frac{b\omega}{2(N+1)^2}.$$

Fin pour.

(2) On évalue le résidu $r^k = A_N a^q - b$.

(3) On projette le résidu obtenu sur la grille de taille n :

$$\rho^k = Rr^k.$$

(4) On résout sur la grille de taille n :

$$e^k = A_n^{-1} \rho^k.$$

(5) On étend la solution obtenue sur la grille de taille N et on met à jour

$$x^{k+1} = a^q - Ee^k.$$

Fin

La proposition suivante montre que l'algorithme converge, avec une vitesse de convergence indépendante de la taille N de la matrice A_N .

Proposition 2. On fixe $\omega = \frac{1}{2}$. Les itérés de l'algorithme 1 satisfont

$$(12) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|_2}{\|x^k - x^*\|_2} = \gamma,$$

avec $\gamma \leq \frac{1}{2^q}$, où q est le nombre d'étapes de la méthode de Jacobi relaxée.

PREUVE. Par construction de l'algorithme, on montre que, avec

$$(13) \quad x^{k+1} - x^* = (I - C)(J_\omega)^q (x^k - x^*), \quad \text{avec } C = EA_n^{-1}RA_N.$$

Dans la suite, c_ℓ et s_ℓ désignent respectivement $\cos(\ell H/2)$ et $\sin(\ell H/2)$, et ℓ' le nombre entier $\ell' = N + 1 - \ell$. À l'aide des formules (10)–(11), on vérifie que, pour $\ell \leq n$,

$$(14) \quad (I - C)(J_\omega)^q z_N^{(\ell)} = (1 - 2\omega s_\ell^2)^q s_\ell^2 c_\ell^{-2} z_N^{(\ell')},$$

$$(15) \quad (I - C)(J_\omega)^q z_N^{(\ell')} = (1 - 2\omega c_\ell^2)^q s_\ell^{-2} c_\ell^2 z_N^{(\ell)}.$$

On a aussi

$$(16) \quad (I - C)(J_\omega)^q z_N^{(n+1)} = (1 - 2\omega s_{n+1}^2)^q z_N^{(n+1)}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que les valeurs propres de la matrice

$$(17) \quad B_\ell = \begin{pmatrix} 0 & (1 - 2\omega s_\ell^2)^q s_\ell^2 c_\ell^{-2} \\ (1 - 2\omega c_\ell^2)^q s_\ell^{-2} c_\ell^2 & 0 \end{pmatrix}$$

valent $\pm s_\ell^q c_\ell^q$ pour la valeur $\omega = \frac{1}{2}$. □

La figure 4 présente les résultats obtenus pour $N = 49$, $\omega = \frac{1}{2}$ et $q = 2$, après 10 itérations de la méthode itérative pour trois valeurs de seconds membres correspondant à $p_i = 1$ (Cas 1), $p_i = 1$ pour i pair et 0 pour i impair (Cas 2), et $p_i = 1$ pour $i < n$ et 0 sinon (Cas 3).

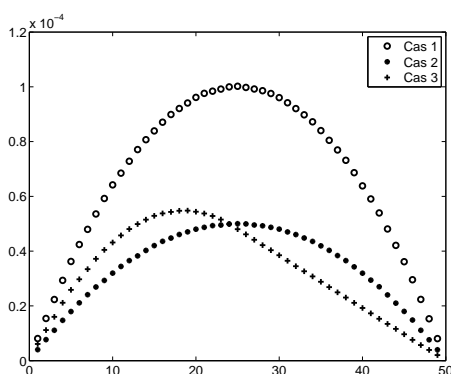


FIGURE 4. Coordonnées de la solution du système $Ax = b$ pour les trois cas considérés.

Suggestions et pistes de réflexion

- *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*
- Le choix $\omega = \frac{1}{2}$ effectué au paragraphe 1 est-il optimal?
- Justifier l'utilisation du terme « interpolation » pour la matrice E définie en (8).
- Vérifier (éventuellement numériquement) quelques-unes de relations (10), (11), (14), (15), (16).
- Analyser (théoriquement et/ou numériquement) la convergence de la méthode itérative.
- Commenter l'expression *effet régularisant* à la fin du paragraphe 1.
- Commenter le coût de calcul de l'étape (4) de l'algorithme. Peut-on envisager une amélioration de la méthode?