Agrégation marocaine de Mathématiques, session 2024

Épreuve de modélisation et Calcul Scientifique

Résumé : On étudie le modèle de Leontieff, qui permet de caractériser les situations d'équilibre dans des secteurs de l'économie d'un pays.

Mots clefs : Valeurs propres, vecteurs propres. Résolution de systèmes linéaires.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Présentation du modèle

Le modèle d'entrée-sorties de Leontieff [1] vise à caractériser l'économie d'un pays en évaluant la quantité de biens qui doit être produite dans chaque secteur et leur prix afin d'assurer une situation d'équilibre.

La première étape consiste à sectoriser l'économie, c'est-à-dire à la partitionner en domaines, qui seront considérés comme homogènes. Par exemple, une sectorisation grossière consiste à considérer trois grands domaines : l'agriculture, l'industrie de biens manufacturés et les services. Une consolidation plus fine distinguerait à l'intérieur de l'agriculture l'élevage, la culture de céréales, etc..., dans la production de biens manufacturés l'industrie automobile, l'aéronautique, l'industrie chimique, etc..., et de même pour les services.

Supposons donc que nous considérions n secteurs. Chacun des secteurs produit une quantité $x_i, i = 1, \dots, n$, d'un bien i. Chaque secteur j a besoin, pour produire une unité de son produit, de consommer une quantité a_{ij} du bien i (qui est donc produit par le secteur i). Enfin, la demande du public pour le bien i est notée c_i. Le modèle de Leontieff consiste à faire le bilan des quantités de biens produits et consommés par les différents secteurs de l'économie. Ce bilan est une relation linéaire qui s'écrit de la façon suivante :

$$Ax + c = x, \tag{1}$$

où x et c dont les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées $(x_i)_i$ et $(c_i)_i$ respectivement, et A la matrice carrée de taille n (appelée *matrice de production*) dont les composantes sont les a_{ij}.

Le modèle présenté ici se base sur différentes hypothèses simplificatrices : on suppose ainsi que chaque produit est obtenu *via* une combinaison unique des autres biens disponibles, sans substitution possible, et que, de plus, toute la production est effectivement utilisée, sans surplus.

1. W. Leontieff, prix Nobel d'économie en 1973.

Si on admet ce modèle simple et qu'on suppose savoir évaluer la matrice de production, la question est alors bien sûr de caractériser les cas où existe un vecteur x qui assure l'équilibre et de le calculer. Dans les applications réelles du modèle, le nombre de secteurs est très grand (n peut valoir plusieurs milliers). Il est donc crucial de disposer de méthodes efficaces pour décider si (1) possède une solution acceptable et l'estimer.

Notations : Si M est une matrice (ou un vecteur), on notera $M \geq 0$ si tous les coefficients de M sont positifs. Si de plus $M \neq 0$, on notera $M \gneq 0$. Si tous les coefficients de M sont strictement positifs, on écrira $M > 0$. Enfin, si M est une matrice carrée, on notera $\rho(M)$ son rayon spectral.

2. Le modèle fermé

Considérons d'abord, pour simplifier, le cas du modèle dit *fermé*, dans lequel il n'y a pas de demande externe, c'est-à-dire que tous les biens produits sont consommés par les différents secteurs. Ceci revient à poser $c = 0$ dans (1), et donne :

$$Ax = x. \tag{2}$$

On se demande donc si A admet 1 comme valeur propre. Mais il faut, de plus, s'assurer qu'une solution $x \gneq 0$ existe. Comme la matrice A est positive, l'étude proposée relève du théorème suivant de Perron-Frobenius.

Théorème 1. *Si M est une matrice carrée telle que $M \geq 0$, alors $\rho(M)$ est une valeur propre de M et il existe un vecteur propre $x \gneq 0$ pour cette valeur propre.*

3. Analyse du modèle ouvert

Dans le cas où la demande c est non nulle, on s'intéresse à la résolution de (1) que l'on écrit

$$Bx = c, \tag{3}$$

où $B = I - A$.

Plus précisément, on cherche des conditions sur B pour que (3) ait une solution x économiquement sensée, c'est-à-dire telle que $x \gneq 0$. Notons que, comme $A \geq 0$, la matrice B a une structure très particulière dite *de Z-matrice* :

Définition 1. *On dit qu'une matrice carrée M est une Z-matrice si tous ses éléments non diagonaux sont négatifs ou nuls.*

3.1. *Matrices productives*

Définition 2. *On dit qu'une Z-matrice M est* **productive** *s'il existe un vecteur $d \geq 0$ tel que $Md > 0$.*

D'un point de vue du modèle économique étudié ici, dire que la matrice B est productive revient à dire qu'on peut faire en sorte que le bilan de production de chacun des biens soit strictement positif.

Théorème 2. *Soit M une Z-matrice. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est productive.*

(ii) *Il existe $d > 0$ tel que $Md > 0$.*

(iii) *Pour tout $c \geq 0$, il existe $x \geq 0$ tel que $Mx = c$.*

(iv) *M est inversible avec $\det M > 0$ et $M^{-1} \geq 0$.*

La propriété (i) implique (ii) car on observe que toute matrice productive a nécessairement ses coefficients diagonaux strictement positifs. Le seul point délicat alors est de démontrer que (ii) implique (iv). Pour cela, on constate que si on note D la matrice carrée diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $d_i > 0$, alors la matrice MD est à diagonale strictement dominante. On en déduit qu'elle est inversible à inverse positive ou nulle. Par ailleurs, $\det M > 0$ car pour tout $s \geq 0$, $sI + M$ est productive donc inversible.

On déduit par exemple de ce résultat qu'il est possible de formuler la notion de *matrice productive* en termes de prix :

Corollaire 1. *Une Z-matrice M est productive si et seulement s'il existe un* **vecteur de prix** *$p \in \mathbf{R}^n$, avec $p > 0$, tel que*

$$ {}^{\mathrm{t}}Mp > 0. \tag{4} $$

3.2. *Critères de productivité*

Dans le cadre du modèle de Leontieff, on déduit de ce qui précède une première condition suffisante simple pour décider si la matrice $B = I - A$ est productive :

Corollaire 2. *Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ et pour tout $j = 1, \ldots, n$, on note $c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. Si la condition suivante est vérifiée :*

$$ \min(\max_i r_i, \max_j c_j) < 1, \tag{5} $$

alors la matrice $B = I - A$ est productive.

On dispose en fait d'un critère un peu plus complexe qui permet de décider si une telle matrice est ou non productive.

Théorème 3 (Conditions de Hawkins-Simon)**.** *Une Z-matrice M est productive si et seulement si ses mineurs principaux successifs (i.e. les déterminants des matrices carrées M_k de taille k obtenues en conservant les k premières lignes et colonnes de M, pour $k = 1, \ldots, n$) sont tous strictement positifs.*

Pour démontrer ce résultat, on remarque tout d'abord que la condition proposée est nécessaire. En effet, si M est productive, il en est de même de toutes les sous-matrices M_k, $k = 1 \dots n$. Pour voir qu'elle est suffisante, on raisonne par récurrence sur n (le cas $n = 1$ étant immédiat). Supposant le résultat vrai au rang $n-1$, on cherche à vérifier la propriété (iii) du théorème 2. Etant donné $c \geq 0$, on effectue des opérations sur les lignes de M pour se ramener à un problème de la forme

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} m_{11} & m'_{12} & \dots & m'_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{M} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} x = \tilde{c},$$

où $\tilde{c}$ est encore un vecteur positif et $\tilde{M}$ une matrice carrée de taille $n-1$ dont on vérifie qu'elle est productive. Ceci permet donc de trouver des valeurs positives ou nulles $x_2, \dots, x_n$ solutions d'un sous-système de taille $n-1$ puis d'en déduire x_1.

Pour continuer dans la compréhension de la structure des matrices en jeu dans le modèle proposé, on peut constater que toute Z-matrice M peut s'écrire sous la forme $M = rI - A$, où r est un réel positif ou nul et A une matrice positive (par exemple $r = 1$ pour la matrice $B = I - A$ du modèle de Leontieff). On possède alors une nouvelle caractérisation du caractère productif de telles matrices :

Théorème 4. *Une Z-matrice $M = rI - A$, avec $A \geq 0$, est productive si et seulement si on a $\rho(A) < r$ et alors*

$$(7) \qquad M^{-1} = \frac{1}{r} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{A}{r} \right)^k.$$

3.3. *Rentabilité*

On se propose d'envisager maintenant la rentabilité économique de chacun des secteurs considérés. On suppose que la matrice de Leontieff $B = I - A$ est productive, on a alors vu qu'il existe un vecteur de prix $p > 0$ tel que ${}^{t}Bp > 0$ qui indique que chaque secteur peut gagner plus d'argent qu'il ne doit en dépenser pour acheter les autres biens nécessaires à sa production. Néanmoins, ce calcul ne tient pas compte du coût de la production en elle-même (salaires des employés, entretien du matériel de production, etc...). On suppose donc que le coût de production de chaque unité de produit i est noté $\pi_i > 0$ et que l'on a ${}^{t}Bp - \pi > 0$ (où π désigne le vecteur $(\pi_i)_i$) de sorte que, malgré les coûts de production, chaque secteur reste rentable.

Le vecteur de prix p et le vecteur de coût de production π étant donnés, le prix total de revient ν_i d'une unité de produit i est donné par $\nu = {}^{t}Ap + \pi$, où ν est le vecteur $(\nu_i)_i$. En résumé, chaque unité de produit i rapporte p_i et coûte ν_i. On appelle le taux de rentabilité du secteur i la quantité

$$(8) \qquad \tau_i = \frac{p_i - \nu_i}{\nu_i}.$$

On dira que l'économie étudiée est équilibrée si tous les secteurs d'activité proposent le même taux de rentabilité $\tau > 0$. La question que l'on se pose est donc : existe-t-il un vecteur de prix $p > 0$ et un réel $\tau > 0$ tel que l'on ait $p - \nu = \tau\nu$, ce qui s'écrit encore

$$(9) \qquad {}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{1}{1+\tau}I - A\right)p = \pi.$$

Un tel vecteur $p > 0$ existe quelle que soit la valeur des coûts de production (qui peuvent évoluer dans le temps) si et seulement si la matrice $\frac{1}{1+\tau}I - A$ est productive. D'après les résultats précédents, cela n'est possible que sous la condition

$$(10) \qquad \frac{1}{1+\tau} > \rho(A).$$

En conclusion, il existe un taux de rentabilité maximal $\tau_{\max}$ (que l'on ne peut atteindre) et pour tout taux de rentabilité $0 < \tau < \tau_{\max}$ et tout vecteur de coût $\pi \geq 0$, il existe un unique vecteur de prix $p > 0$ qui rende le système économique étudié équilibré.

4. Aspects numériques

• **Résolution de** (3) **:** Comme indiqué plus haut, la matrice de production A peut être très grande dans les applications. Pour résoudre (3), on peut utiliser une méthode directe utilisant une décomposition matricielle, ou alors un algorithme de gradient. Si on suppose que la matrice $B = I - A$ est productive, il est plus sûr d'utiliser une méthode directe. Sinon, il peut être nécessaire de mettre en place un algorithme de gradient.

• **Erreurs d'arrondis :** Les éléments a_{ij} de la matrice de production sont estimés empiriquement *via* diverses méthodes dont il ne sera pas question ici. Cependant, il est clair que les coefficients $\tilde{a}_{ij}$ utilisés dans les calculs ne peuvent être que des approximations des coefficients idéaux a_{ij}. On peut alors se demander si les bonnes propriétés de A assurant une solution positive x sont conservées quand on travaille avec $\widetilde{A}$.

Nous allons étudier un sous-problème de cette question, en caractérisant dans un certain cas les matrices M qui sont inverses-positives (c'est-à-dire telles que $M^{-1} \geq 0$) quand une condition sur la matrice approximante $\widetilde{M}$ est vérifiée.

Soient deux matrices $\underline{M}$ et $\overline{M}$ telles que $\underline{m}_{i,j} \leq \overline{m}_{i,j}$ pour tout i, j. On dit qu'une matrice M appartient l'intervalle $[\underline{M}, \overline{M}]$ si pour tout i, j, $\underline{m}_{i,j} \leq m_{i,j} \leq \overline{m}_{i,j}$.

Proposition 1. *Si $\overline{M}^{-1} > 0$ et $\rho(\overline{M}^{-1}(\overline{M} - \underline{M})) < 1$, alors toutes les matrices de l'intervalle $[\underline{M}, \overline{M}]$ sont inverses-positives.*

On considère maintenant la situation simple où la matrice approximante $\widetilde{M}$ est obtenue par arrondi décimal de M. Plus précisément, on suppose que pour tout i, j :

$$(11) \qquad \begin{array}{rcll} \widetilde{m_{i,j}} & = & \lfloor 10^d m_{i,j} + 0.5 \rfloor \, 10^{-d} & \text{si } m_{i,j} \geq 0, \\ & = & -(\widetilde{-m_{i,j}}) & \text{sinon,} \end{array}$$

où d est un entier positif et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel positif x. Posons $\delta = 0.5 \ 10^{-d}$. On suppose connue la matrice approchée $\widetilde{M}$ et l'entier d. Le résultat suivant nous donne une condition pour que la matrice M elle-même soit inverse-positive.

Théorème 5. *Soit E la matrice carrée dont tous les coefficients valent* 1. *Si*

$$(\widetilde{M}+\delta E)^{-1} > 0, \tag{12}$$

et si la somme s des coefficients de $(\widetilde{M}+\delta E)^{-1}$ vérifie $s < 10^d$, alors M est inverse-positive.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

Modélisation

- Donner une interprétation des corollaires 1 et 2 en termes économiques.
- À partir de la formule (7), établir un algorithme itératif, le moins coûteux possible, de résolution du système (3). Comment interpréter cet algorithme dans le cadre du modèle ?
- Détailler et commenter la discussion de la section 3.3.

Aspects Mathématiques

- Compléter la ou les preuves d'un ou plusieurs des résultats proposés dans le texte.
- Dans le cas ouvert, quelles conditions sur M permettent d'assurer l'unicité (à constante multiplicative près) de la solution x de (2) ?
- Dans le cas où la matrice B n'est pas productive, proposez une solution pour définir et calculer un vecteur x positif qui soit une solution approchée de l'équation (3) ?

Aspects Numériques

- Proposer une ou plusieurs méthodes numériques pour résoudre l'équation (3).
- Illustrer numériquement les propriétés de stabilité de la notion de matrice inverse-positive exposées dans la section 4.