Gestion de stock avec demande aléatoire

Résumé : Chaque mois, le gérant d'un magasin doit contrôler le niveau du stock d'un produit donné, vendu à l'unité. Au vu du niveau restant du mois précédent, il doit décider de commander ou non un certain nombre d'unités. L'objectif est d'optimiser la stratégie de commande, connaissant la loi de probabilité de la demande mensuelle, les prix d'achat et de vente, ainsi que le cout de stockage des objets.

Mots Clés : économie, chaîne de Markov, chaîne irréductible, chaîne apériodique, matrice de transition, régime stationnaire

---

▶ *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et en mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Optimisation d'une commande

On considère un magasin proposant à la vente un article particulier. Les commandes au fournisseur s'effectuent au mois. Les nombres d'articles demandés par les clients chaque mois sont vus comme des réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Cette loi peut être estimée statistiquement et elle est supposée connue. Pour un mois donné, on note $p(i)$ la probabilité que i articles soient demandés, et :

$$r(i) = 1 - p(0) - \cdots - p(i-1)$$

la probabilité que i articles au moins soient demandés. Le cout d'une commande se compose d'un cout fixe C et d'un cout unitaire c. Une commande de x unités coute donc $C + cx$. Le prix de vente unitaire est v. Le cout unitaire de stockage est k. On suppose que ce cout est imputable à toute unité, qu'elle soit présente en stock au début du mois ou qu'elle ait été commandée. On suppose évidemment $v > c + k$ (le prix de vente est supérieur au cout unitaire de commande et de stockage).

Supposons que x_0 unités soient présentes en stock au début du mois, et que la demande du mois soit la variable aléatoire D de loi $p = (p(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Le gérant peut décider de ne rien commander, auquel cas son cout de stockage sera kx_0, son revenu sera $v \min\{D, x_0\}$, et son bénéfice espéré est :

$$b_{x_0}(0) = vx_0 r(x_0) + v \sum_{i=0}^{x_0-1} ip(i) - kx_0$$

Il peut aussi décider de commander x unités supplémentaires, auquel cas son bénéfice espéré est :

$$b_{x_0}(x) = v\,(x_0 + x)\, r\,(x_0 + x) + v \sum_{i=0}^{x_0+x-1} i p(i) - k\,(x_0 + x) - C - cx$$

Pour $x > 0$, calculons $b_{x_0}(x+1) - b_{x_0}(x)$. On trouve :

$$b_{x_0}(x+1) - b_{x_0}(x) = vr\,(x_0 + x + 1) - (k + c)$$

Notons :

$$S = \max\left\{ i \in \mathbb{N} : r(i) > \frac{k+c}{v} \right\} \tag{1}$$

L'entier S représente le stock optimal théorique, celui qui maximiserait le bénéfice espéré si l'on ne tenait pas compte du cout forfaitaire de commande C. La stratégie du gérant consisterait alors à compléter son stock à hauteur de S, en commandant la quantité $\hat{x} = S - x_0$, si $x_0 \leqslant S$. Mais compte tenu du cout C, si la quantité x_0 est suffisamment élevée (tout en restant inférieur à S), il peut se faire que $b_{x_0}(0)$ soit supérieur à $b_{x_0}(\hat{x})$, et donc qu'il n'y ait pas intérêt à commander. En effet l'application

$$i \in [0, S] \cap \mathbb{N} \quad \mapsto \quad b_i(S - i) - b_i(0)$$

est décroissante, ce qui nous incite à poser

$$s = \min\left\{ 0 \leqslant i \leqslant S : b_i(0) > b_i(S - i) \right\} \tag{2}$$

L'entier s est le stock plancher, à partir duquel il n'y a pas intérêt à commander. En résumé, la stratégie que suivra le gérant est la suivante : si en début de mois le stock est supérieur ou égal au stock plancher s, il ne commande rien. S'il est inférieur à s, il commande la quantité nécessaire pour compléter jusqu'au stock optimal théorique S.

2. Modélisation markovienne

On suppose maintenant que les demandes mensuelles constituent une suite $(D_t)\,, t \in \mathbb{N}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $X(t)$ le nombre d'articles présents en stock à la fin du mois t, après la vente du mois, et avant la commande éventuelle du mois suivant. La stratégie de gestion est celle de la section précédente : si le nombre d'articles restants au début du mois est supérieur ou égal à s, rien n'est commandé. S'il reste strictement moins de s articles, une commande est effectuée de manière à compléter à hauteur de S.

La suite de variables aléatoires $(X(t))_{t\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, \ldots, S\}$. Voici sa matrice de transition pour le cas particulier $s = 3, S = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$r(7)$	$p(6)$	$p(5)$	$p(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$
1	$r(7)$	$p(6)$	$p(5)$	$p(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$
2	$r(7)$	$p(6)$	$p(5)$	$p(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$
3	$r(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$	0	0	0	0
4	$r(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$	0	0	0
5	$r(5)$	$p(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$	0	0
6	$r(6)$	$p(5)$	$p(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$	0
7	$r(7)$	$p(6)$	$p(5)$	$p(4)$	$p(3)$	$p(2)$	$p(1)$	$p(0)$

On suppose que pour tout $i \in \{0,\dots,S\}, p(i)$ est strictement positif. La channe de Markov $(X(t))$ est irréductible et apériodique sur l'ensemble fini $\{0,\dots,S\}$. Elle admet donc une mesure stationnaire unique, que l'on notera $\pi = (\pi(i)), i = 0,\dots,S$.

Une fois connue la mesure stationnaire π, on peut évaluer les quantités d'intérêt économique sur le long terme. Par exemple, en régime stationnaire, l'espérance du bénéfice mensuel est :

$$\bar{b} = \sum_{i=0}^{s-1} \pi(i) b_i(S-i) + \sum_{i=s}^{S} \pi(i) b_i(0) \tag{3}$$

Il s'agit aussi de la limite (presque sure)

$$\bar{b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{0\leqslant t\leqslant n} B(t) \tag{4}$$

où

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad B(t) = b_{X(t)}(S - X(t))\mathbb{1}_{\{X(t)<s\}} + b_{X(t)}(0)\mathbb{1}_{\{X(t)\geq s\}} \tag{5}$$

est le bénéfice espéré du $(t+1)$-ième mois. On dispose ainsi de deux accès possibles au bénéfice moyen $\bar{b}$, d'une part en calculant d'abord π comme solution du système d'équations correspondant et en appliquant la formule (3) et d'autre part en ayant plutôt recours à (4) à partir de la simulation d'une trajectoire de $(X(t))_{t\in\mathbb{N}}$ (cette dernière méthode sera plus approximative, mais beaucoup plus facile à implémenter si S est grand).

D'autres quantités sont pertinentes pour le gérant, par exemple le nombre moyen de ventes effectuées mensuellement : en régime stationnaire il est donné par

$$\bar{w} = \pi([0, s-1]) \left(r(S)S + \sum_{1\leqslant j\leqslant S-1} p(j)j \right) + \sum_{s\leqslant i\leqslant S} \pi(i) \left(r(i)i + \sum_{1\leqslant j\leqslant i-1} p(j)j \right) \tag{6}$$

Sil'on fait l'hypothèse naturelle que la demande admet une espérance finie $d = \mathbb{E}[D_0] < +\infty$, on en déduit que le nombre moyen de ventes perdues est $d - \bar{w}$ (toujours en régime stationnaire). Souvent dans la vie réelle, les clients qui n'ont pas pu être servis du fait de l'absence du produit en stock induisent un "cout de refus" unitaire égal à $\gamma > 0$: si la demande D d'un mois donné est supérieure au stock $x_0 + x$ après commande, $D - (x_0 + x)$ clients ne seront pas satisfaits, et il faudra retrancher $(D - (x_0 + x))\,\gamma$ du bénéfice de ce mois. En reprenant l'analyse précédente de la stratégie optimale, on peut vérifier que dans ce type de situation (du moins si la demande est d'espérance finie), le nouveau stock optimal théorique est

$$\widetilde{S} = \max\left\{ i \in \mathbb{N} : r(i) > \frac{k+c}{\gamma+v} \right\} \tag{7}$$

Revenons au cas où $\gamma = 0$, le gérant peut décider d'adopter d'autres stratégies, par exemple décider de commander systématiquement, dès que son stock est en-dessous de la valeur optimale S. La suite correspondante $(X^*(t))_{t\in\mathbb{N}}$ des articles présents en stock en fin de mois est alors une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi π^* et le bénéfice moyen vaut donc

$$\bar{b}^* = \sum_{i=0}^{s-1} \pi^*(i) b_i(S-i) + \sum_{i=s}^{S} \pi^*(i) b_i(0)$$

A l'inverse, le gérant peut décider de ne commander que si son stock est épuisé (ce qui revient à prendre $s = 1$). Soient respectivement $(X_*(t))_{t\in\mathbb{N}}$ et π_* la chaîne de Markov et sa loi invariante associées à cette situation. Le bénéfice moyen s'écrit maintenant

$$\bar{b}_* = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_*(i) b_i(S-i) + \sum_{i=s}^{S} \pi_*(i) b_i(0)$$

Du fait que ces deux dernières stratégies ne sont pas optimales, on aura

$$\max\left(\bar{b}^*, \bar{b}_*\right) \leqslant \bar{b}$$

D'autres comparaisons naturelles sont possibles entre π, π^* et π_*. Pour cela introduisons une relation d'ordre $\preceq$ sur les probabilités définies sur $\mathbb{N}$ en convenant que $\pi_1 \preceq \pi_2$ si pour toute fonction croissante et bornée $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on est assuré de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\pi_1(n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\pi_2(n)$$

Notamment, si Y, Z sont deux variables aléatoires (définies sur un même espace de probabilité) à valeurs dans $\mathbb{N}$ de lois respectives π_1 et π_2 et vérifiant $Y \leqslant Z$, on peut conclure que $\pi_1 \preceq \pi_2$ En ayant recours aux chaines de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{N}}$, $(X^*(t))_{t\in\mathbb{N}}$ et $(X_*(t))_{t\in\mathbb{N}}$, il alors est possible de vérifier que

$$\pi_* \preceq \pi \preceq \pi^*$$

3. Suggestions pour le développement

1. Modélisation et justifications mathématiques

Dans le texte de nombreuses affirmations ne sont pas ou peu justifiées et vous pourriez en compléter l'argumentation, c'est par exemple le cas pour les formules (1), (2), (4), (6) ou (7). Vous pourriez aussi montrer que le nombre moyen de ventes perdues est bien donné par $d - \bar{w}$. Le véritable nombre de ventes perdues jusqu'à un certain mois donné $T \in \mathbb{N}$ (tel qu'il aura été observé par le vendeur dans le magasin) peut-il se lire sur la chaîne $(X(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$? La formule (5) donne l'expression d'un bénéfice espéré, comment s'exprime le bénéfice effectivement reçu? Calculez π^* et prouvez que les variables $X^*(t)$, pour $t \in \mathbb{N}$, sont indépendantes. Par ailleurs, vous pourriez également développer les comparaisons entre probabilités évoqués à la fin du texte.

2. Calculs explicites et numériques

Dans le cas où la loi de D est l'équiprobabilité sur $\{0, \dots, a\}$ (avec $a \in \mathbb{N}^*$), pouvezvous calculer explicitement les valeurs de s et S, en fonction de a, v, k, c, C (on pourra prendre éventuellement des valeurs particulières pour certaines de ces quantités)? On peut aussi considérer la loi de probabilité définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$p(i) = \rho(1-\rho)^i$$

où ρ est un paramètre strictement compris entre 0 et 1. Quelles sont alors les équations satisfaites par S et s? Comment feriez-vous pour les résoudre?

Vous pouvez représenter graphiquement les variations de s et S en fonction de k, et commenter les graphiques obtenus.

Pour une loi de probabilité p à choisir, vous pouvez fixer des valeurs (pas forcément optimales pour S et s) des paramètres et calculer numériquement la mesure stationnaire ainsi que le bénéfice moyen espéré $\bar{b}$. Vous pouvez aussi simuler le modèle et comparer une estimation du bénéfice espéré (ou du nombre de vente effectuées) à sa valeur numérique. Vous pourriez aussi vous intéresser aux ventes perdues.

Sur l'un des exemples précédents, quantifiez numériquement l'effet sur le bénéfice moyen la prise en compte d'un cout de refus $\gamma \geq 0$? Vous pourriez aussi comparer par calcul numérique ou simulation les quantités $\bar{b}$, $\bar{b}^*$ et $\bar{b}_*$ (voire les probabilités π, π^* et π_*) et justifier ainsi l'intérêt économique qu'il y a à adopter la stratégie optimale ?

3. Stratégie optimale pour un modèle continu et chaine de Markov sur $[0, S]$

Supposons que les quantités de produit soient modélisées par des réels. La demande D est une variable aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}^+$, supposée connue. Les notations pour le prix de vente et les couts de commande et de stockage restent identiques. Le bénéfice espéré en cas de commande d'une quantité $x > 0$ pour compléter un stock initial de x_0 devient :

$$b_{x_0}(x) = v\,(x_0 + x) \int_{x_0+x}^{+\infty} f(t)dt + v \int_0^{x_0+x} tf(t)dt - k\,(x_0 + x) - C - cx$$

Peut-on encore montrer que la stratégie optimale consiste à décider de commander endessous d'un stock plancher s, pour compléter jusqu'à un stock optimal S?

Si D suit la loi uniforme sur $[0, a]$, avec $a > 0$, pouvez-vous calculer explicitement les valeurs de s et S en fonction de a, v, k, c, C? Vous pouvez réaliser une simulation du modèle.

On suppose désormais que D suit la loi uniforme sur $[0, a]$. La stratégie adoptée chaque mois est toujours la même : commande en-dessous d'un plancher s pour compléter le stock jusqu'à S. On note encore $X(t)$ la quantité restant en stock à la fin du mois t, avant la commande du mois suivant. La suite de variables aléatoires $(X(t))$ est une chaîne de Markov, à valeurs dans l'intervalle $[0, S]$. On démontre que $(X(t))$ converge en loi vers une certaine loi de probabilité π sur $[0, S]$ (mesure stationnaire). Vous pouvez donner une approximation de π par simulation, en fixant des valeurs pour les paramètres.