File d'attente

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

I. Modélisation d'une file d'attente d'un guichet

On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, selon le phénomène suivant : à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, il arrive un client avec la probabilité $p \in]0,1[$ et pas de client avec une probabilité $1-p$. Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système (la file d'attente) avec probabilité $q \in]0,1[$, et personne ne quitte le système avec la probabilité $1-q$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n+1$). Les événements liés aux arrivées et aux départs des clients sont indépendants entre eux. On suppose qu'à chaque instant n, il est question d'un seul client qui peut arriver et d'un seul client qui peut quitter le système. On exclut l'arrivée de deux clients au même instant et on exclut le départ de deux clients au même instant mais on tolère l'arrivée d'un client et le départ d'un autre au même instant. On suppose que les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées.
On modélise le nombre de clients présents dans la file à l'instant n par la variable X_n.
Si on note A_n (resp. D_n) l'événement "Arrivée d'un client à l'instant n" (resp. "Départ d'un client à l'instant n") et si $\bar{A}_n$ et $\bar{D}_n$ sont respectivement les événements complémentaires de A_n et B_n, alors X_{n+1} peut s'écrire sous la forme :

- si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = 1\!\!1(A_{n+1})$
- si $X_n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n 1\!\!1((A_{n+1} \cap D_{n+1}) \cup (\bar{A}_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1})) + (X_n + 1) 1\!\!1(A_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1}) + \\ &\quad + (X_n - 1) 1\!\!1(\bar{A}_{n+1} \cap D_{n+1}), \end{aligned}$$

avec, pour un événement E, $1\!\!1(E) = 1$ si E est réalisé et $1\!\!1(E) = 0$ si E n'est pas réalisé. Quand un événement n'est pas réalisé, c'est donc son complémentaire qui est réalisé.

On montre que $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible, d'espace d'état $\mathbb{N}$, et de matrice de transition $P = (P(i,j))_{i,j \in \mathbb{N}}$ donnée par.

$$P = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\bar{p} = 1 - p$ et $\bar{q} = 1 - q$.
On montre, sous des conditions sur p et q, que la chaîne X possède une probabilité invariante unique $\pi = (\pi_i)_{i \in I\!N}$.
Une des mesures de performance du système est le temps moyen de séjour dans un sous espace d'états du système.

II- Un rappel sur les chaîne de Markov à temps discret
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.
Soit le processus $X = (X_n)_{n \geq 0}$ défini par une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini E appelé espace d'état, et soit $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$ une loi de probabilités sur E. Pour $i \in E$, la notation $X_n = i$ signifie que le processus X est dans l'état i à l'instant n.

II.1 Définition 1. On dit que le processus $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret ($n \in I\!N$), à espace d'état E et de loi initiale μ si et seulement si

$$\forall\, n \geq 0,\ \forall\, i, i_0, \ldots, i_{n-1}, j \in E,$$

$$I\!P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = I\!P(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

$$I\!P(X_0 = i) = \mu(i)$$

La probabilité $I\!P(X_{n+1} = j / X_n = i)$ est appelée probabilité de transition, de la chaîne X, de l'état i à l'état j entre les instants n et $n+1$.

II.2 Définition 2. La chaîne de Markov X est dite homogène dans le temps si et seulement si la probabilité $I\!P(X_{n+1} = j / X_n = j)$ est indépendante du temps n. Dans ce cas on la note $K(i,j) := I\!P(X_{n+1} = j / X_n = j)$, et la matrice ainsi obtenue $K = (K(i,j))_{i,j \in E}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov homogène X.

II.3 Remarque 1. Une chaîne de Markov à temps discret et homogène X est caractérisée par le triplet (E, μ, K), où E est son espace d'état, $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$ est sa loi initiale, $\mu(i) = I\!P(X_0 = i)$, et $K = (K(i,j))_{i,j \in E}$ est sa matrice de transition.

II.4 Remarque 2. Pour tout état i fixé dans E, $\{K(i,j),\ \ j \in E\}$ est une loi de probabilité sur E. Les lignes de la matrice de transitions sont donc des lois de probabilité sur E.

II.5 Notations. On note $X \sim (E, \mu, K)$ pour désigner une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n \geq 0}$ à temps discret, à espace d'état E, de loi initiale $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$, et de matrice de transition $K = (K(i,j))_{i,j \in E}$.

II.6 Graphe de transition. Le graphe de transition d'une chaîne de Markov $X \sim (E, \mu, K)$ est un graphe orienté et évalué, dont les sommets sont les états (éléments de E) et les arcs sont des flèches dont les valeurs sont les coéfficients de la matrice K (la valeur de l'arc qui se dirige de l'état i vers l'état j est $K(i,j)$). Les arcs de valeurs nulles ne sont pas dessinés.

II.7 Définition 3. On dit qu'une chaîne de Markov $X \sim (E, \mu, K)$ est irréductible si et seulement si

$$\forall\, i, j \in E, \;\; \exists m \in I\!N^* \quad K^{(m)}(i,j) > 0$$

où $K^{(m)}(i,j)$ est l'entrée (i,j) de la matrice K^m. Cela représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j en m transitions.
Nous avons donc pour tout $i, j \in E$,

$$K^{(m)}(i,j) = \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1} \in E} K(i,i_1)K(i_1,i_2)\cdots K(i_{m-1},j) \tag{1}$$

II.8 Proposition 1. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$.
Alors $\forall\, n \geq 0,\; \forall\, i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$

$$I\!P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu(i_0)K(i_0,i_1)K(i_1,i_2)\cdots K(i_{n-1},i_n)$$

II.9 Proposition 2. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Alors

$$\forall\, m > 0, \quad I\!P(X_m = j) = \sum_{i \in E} \mu(i) K^{(m)}(i,j), \quad \forall j \in E$$

II.10 Proposition 3. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Alors

$$\forall\, n \geq 0,\; \forall\, m > 0,\; \forall\, i, j \in E, \quad I\!P(X_{n+m} = j / X_n = i) = I\!P(X_m = j / X_0 = i) = K^{(m)}(i,j)$$

II.11 Proposition 4. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Nous avons alors les équations de Chapman-Kolmogorov suivantes :

$$\forall m \geq 2 \;,\; \forall\, 0 < r < m \;,\; \forall\, i, j \in E, \quad K^{(m)}(i,j) = \sum_{k \in E} K^{(m-r)}(i,k) K^{(r)}(k,j)$$

II.12 Définition 4 (loi stationnaire ou invariante). Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. On dit qu'une loi de probabilité, $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$ sur E, est une loi stationnaire de X (ou loi invariante par K) si et seulement si

$$\sum_{i \in E} \pi(i) K(i,j) = \pi(j), \quad \forall\, j \in E \tag{2}$$

Les équations (2) sont appelées **équations de balance ou d'équilibre**. Elles peuvent être réécrites matriciellement sous la forme

$$\pi^t K = \pi^t \qquad (\pi^t \text{ désigne la transposée du vecteur colonne } \pi)$$

II.13 Théorème 1. Si $X \sim (E, \mu, K)$ est une chaîne de Markov homogène et irréductible avec E fini, alors il existe une loi stationnaire $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$ unique de X.

II.14 Génération d'une trajectoire d'une chaîne de Markov
Soit $X \sim (E, \mu, K)$ une chaîne de Markov homogène. Une procédure de génération d'une trajectoire $x = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$, de longueur p, de la chaîne X est la suivante :

on commence par générer la réalisation x_0 selon la loi de probabilité initiale μ définie sur E, puis à partir de x_0, on génère de manière récurssive pour $k = 1, \ldots, p$, chaque réalisation x_k par la loi de probabilité $K(x_{k-1}, .)$ définie sur E.

II.14.1 Génération selon une loi de probabilité discrète.
Pour une variable aléatoire réelle discrète Y à valeurs dans $E = \{y_k; k = 1, 2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = \mathbb{P}(Y = y_k),\ k = 1, 2, \ldots$, on génère une réalisation y de Y, en utilisant un nombre uniforme $u \in]0, 1[$, donnée par un générateur de nombres aléatoires (random), de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{on décide} \quad y = y_1 \\ \text{Sinon on décide } y = y_k & \text{telle que} \quad \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \end{cases}$$

III- Suggestions de développement
Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

III.1 Aspect mathématique

1.) Proposer des preuves pour les propositions $1, 2, 3$ et 4
2.) Etudier la classification des états de la chaîne X du modèle proposé.
3.) Etudier l'existence et l'unicité d'une loi probabilité invariante π pour la chaîne du modèle proposé.
4.) Expliciter π, quand elle existe, en fonction des paramètres du modèle proposé.
5.) Définir le temps moyen de séjour de la chaîne X dans un état donné

III.2 Aspect enseignement

1.) Expliquer la formulation de X_{n+1} en fonction de X_n (donnée dans le text)
2.) Tracer le graphe de transition de la chaîne X
3.) Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne X.
4.) Expliquer ce que signifie la classification des états de la chaîne X.
5.) Proposer d'autres mesures de performance du système modélisé
6.) Repérer les changements dans le modèle si on rajoute la contrainte suivante : la capacité du système est limitée (à tout instant n, on ne peut avoir plus de K clients dans le système).

III.3 Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

1.) Simuler et tracer une trajectoire de la chaîne X de l'instant $n = 0$ à l'instant $n = 100$ en supposant que X démarre dans l'état 0, pour $p = 1/2$ et $q = 3/4$.

2.) En générant 100000 trajectoires de X démarrant dans l'état 0, calculer une approximation de π_2. On traitera le cas $(p, q) = (1/2, 3/5)$.

3.) On suppose maintenant que le système est de capacité finie K. Dans ce cas l'espace d'état de X devient $\{0, 1, \dots, K\}$. Pour simplifier on garde les mêmes notations que pour le cas d'une capacité illimité.

3.1) Tronquer la matrice de transition P en supprimant les lignes $i > K$ et les colones $j > K$, puis renormaliser la dernière ligne de la matrice tronquée pour obtenir une matrice de transition.

3.2) En prenant $K = 3$ (dans toute la suite), expliciter la loi invariante π.

3.3) Générer une trajectoire de longueur $n = 1000$ et calculer les quantités $\hat{p}_j(n)$, pour $j = 0, 1, \dots, K$, définies par :

$$\hat{p}_j(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = j)$$

3.4) Comparer graphiquement les π_j avec les $\hat{p}_j(n)$ pour les valeurs de n : $100, 1000$ et 10000. On traitera les cas $(p, q) = (1/2, 3/5)$

3.5) Proposer une approximation du temps moyen de séjour dans un état du système.