

Résumé : On s'intéresse à un modèle de combustion ; on met en place une stratégie de résolution numérique adaptée afin de décrire l'évolution du front consumé.

Mots clés : Équations aux dérivées partielles. Problème d'évolution. Différences finies.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Évolution d'un front de flamme

On considère un matériau combustible (un bloc de propergol solide, une forêt, ...) représenté par le plan \mathbb{R}^2 tout entier, afin de négliger dans un premier temps toute difficulté liée aux conditions de bords. On décrit le phénomène de combustion par l'évolution du front de flamme qui sépare la partie déjà brûlée de la partie non encore consumée. Ce front est décrit par une courbe

$$(1) \quad y = p(t, x),$$

et on va établir une équation d'évolution satisfaite par p . À l'instant $t \geq 0$, on note

$$(2) \quad \mathcal{C}(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = p(t, x)\},$$

et le domaine

$$(3) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < p(t, x)\}$$

représente la partie du combustible déjà consumée à l'instant $t > 0$. Le phénomène de combustion est caractérisé par une vitesse de propagation c qu'on supposera constante : sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, tout point de \mathbb{R}^2 situé au-dessus de $\mathcal{C}(t)$ et à une distance inférieure à $c\Delta t$ d'un point de $\mathcal{C}(t)$ est brûlé. La figure 2 en page 4 montre un exemple d'évolution d'un tel front.

D'un point de vue mathématique, ceci se traduit par les propriétés suivantes :

$$(4) \quad \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad |x - x'|^2 + |p(t + \Delta t, x) - p(t, x')|^2 \geq c^2 \Delta t^2,$$

et, de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(5) \quad \inf_{x' \in \mathbb{R}} \{|x - x'|^2 + |p(t + \Delta t, x) - p(t, x')|^2\} = c^2 \Delta t^2.$$

Cette relation peut se réécrire

$$(6) \quad p(t + \Delta t, x) = \sup_{|x-x'|\leq c\Delta t} \left\{ p(t, x') + \sqrt{c^2\Delta t^2 - |x-x'|^2} \right\}.$$

En supposant que p est une fonction suffisamment régulière et en faisant tendre Δt vers 0, on est donc conduit à

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} p = \sup_{|\xi|\leq c} \left\{ \xi \frac{\partial}{\partial x} p + \sqrt{c^2 - \xi^2} \right\}.$$

Les propriétés de la fonction $F_h(\xi) = \xi h + \sqrt{c^2 - \xi^2}$ permettent de déterminer le ξ optimal comme

$$(8) \quad \frac{c h}{\sqrt{1 + h^2}},$$

et finalement, $p(t, x)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} p + f\left(\frac{\partial}{\partial x} p\right) = 0, \quad f(s) = -c\sqrt{1 + s^2}.$$

La fonction $u = \frac{\partial}{\partial x} p$ vérifie donc la loi de conservation

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0.$$

On peut donc adopter deux points de vue : ou bien s'intéresser directement à (9), ou bien s'intéresser à (10) et reconstituer $p(t, x)$ par intégration en espace. Nous allons maintenant discuter quelques propriétés mathématiques de ces équations avant d'en envisager l'approximation numérique.

2. Remarques sur l'équation (10)

En négligeant toute difficulté liée à la régularité de la solution u , on peut réécrire (10) comme

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + f'(u) \frac{\partial}{\partial x} u = 0.$$

Considérons dans un premier temps, la situation plus simple où $f(s) = -cs$. Alors (11) peut s'interpréter comme

$$(12) \quad \frac{d}{dt} [u(t, x - ct)] = 0,$$

et on en déduit que la solution s'exprime simplement en fonction de la donnée initiale $u(t, x) = u^{\text{init}}(x + ct)$. Ce raisonnement peut être adapté au cas non linéaire $f(s) = -c\sqrt{1 + s^2}$ qui nous intéresse ici. On introduit les courbes $X(t; x)$ solution de l'équation différentielle (en supposant que ceci a bien un sens...)

$$(13) \quad \frac{d}{dt} X(t; x) = f'(u(t, X(t; x))), \quad X(0; x) = x,$$

et on a maintenant

$$(14) \quad \frac{d}{dt} [u(t, X(t; x))] = 0.$$

Autrement dit, $u(t, X(t, x)) = u^{\text{Init}}(x)$ pour tout t et (13) devient donc

$$(15) \quad \frac{d}{dt} X(t; x) = f'(u^{\text{Init}}(x)), \quad X(0; x) = x.$$

Cette équation s'intègre immédiatement pour donner $X(t, x) = x + t f'(u^{\text{Init}}(x))$. Afin d'exprimer la solution u en fonction de la donnée initiale u^{Init} , il faut être en mesure d'inverser cette relation, c'est-à-dire, étant donné $X \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, trouver x vérifiant $X = \varphi_t(x)$ où φ_t est la fonction paramétrée par t définie par $\varphi_t(x) = x + t f'(u^{\text{Init}}(x))$. On note que $\varphi'_t(x) = 1 + t f''(u^{\text{Init}}(x))(u^{\text{Init}})'(x)$. Ici, la fonction f est concave; donc lorsque la donnée initiale u^{Init} est décroissante, la fonction φ_t est croissante pour tout $t > 0$ et on peut bien déterminer x en fonction de X . Ce n'est plus le cas lorsque u^{Init} est croissante et ceci se traduit par l'apparition de singularités en temps fini, comme illustré par la figure 1. Le cadre fonctionnel permettant de donner un sens à l'équation (10) pour de telles solutions discontinues dépasse cependant le propos de cette étude et nous allons maintenant nous intéresser à la résolution numérique de (9) et (10).

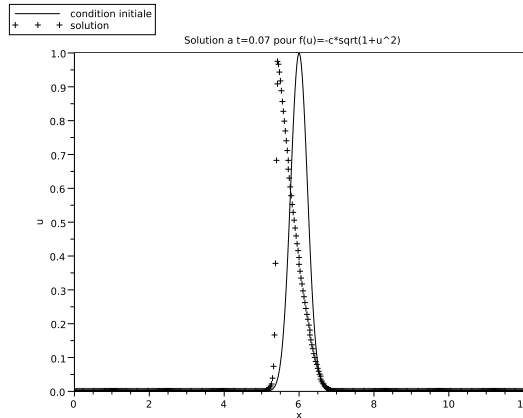


FIGURE 1. Formation d'une singularité pour l'équation (10).

3. Simulation numérique

3.1. Résolution de (9)

La première idée consiste à revenir aux calculs qui ont mené au modèle et qui permettent d'écrire

$$(16) \quad p(t, x) = \sup_{-c \leq \xi \leq c} \{p^{\text{Init}}(x + \xi t) + \sqrt{c^2 t^2 - \xi^2 t^2}\}.$$

Ayant discrétisé le domaine d'étude $[0, L]$ avec un pas constant $\Delta x > 0$, on définit les fonctions

$$(17) \quad p_j(t) = \sup_{|k-j| \leq ct/\Delta x} \{p^{\text{Init}}(k\Delta x) + \sqrt{c^2 t^2 - (k-j)^2 \Delta x^2}\},$$

pour $t > 0$ et $j \in \{1, \dots, J\}$, où J est la partie entière de $L/\Delta x$. La fonction $p_j(t)$ a vocation à approcher la valeur exacte de la solution $p(x_j, t)$ au point d'abscisse $x_j = j\Delta x$. On notera que cette définition fait intervenir, pour un temps t donné dans $[0, T]$, des points x_k qui sont en dehors du domaine d'étude. On doit donc utiliser une donnée p^{Init} définie sur un intervalle suffisamment grand, contenant $[0, L]$. La figure 2 montre l'évolution du front obtenu par cette méthode, avec $L = 12$, $c = 2$, $\Delta x = 0.02$ et la donnée initiale

$$(18) \quad p^{\text{Init}}(x) = \mathbb{1}_{[1.8, 6.6]}(x)(2.4 - |x - 4.2|) + \mathbb{1}_{[6.6, 9]}(x)(0.6 - b|x - 7.8|),$$

avec le paramètre $b = 0.5$, prolongée de façon constante au-delà du domaine $[0, L]$. Par convention, $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique d'un ensemble A .

On va comparer cette approche avec celle qui consiste à résoudre plutôt la loi de conservation (10) qui se prête bien à une approximation par différences finies.

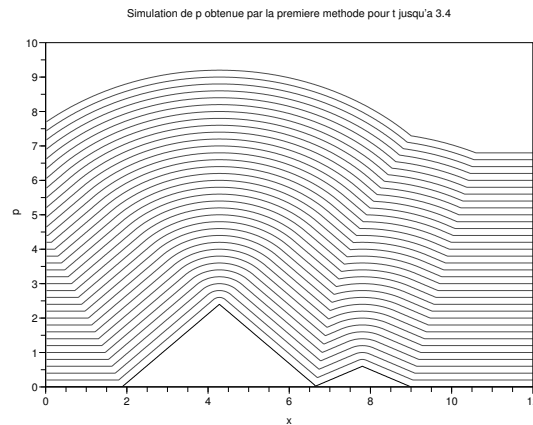


FIGURE 2. Évolution du front de flamme.

3.2. Résolution de (10)

Une méthode naïve pour résoudre numériquement (10) consiste à envisager une méthode de différences finies

$$(19) \quad u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)).$$

Même pour le simple modèle linéaire $f(s) = -cs$, ce schéma n'est pas satisfaisant : la figure 3, qui représente la résolution de (10) dans le cas particulier $f(u) = -cu$ par le schéma (19), avec pour donnée initiale $u^{\text{Init}}(x) = \mathbb{1}_{x \leq 0}$, est typique d'un défaut de stabilité numérique.

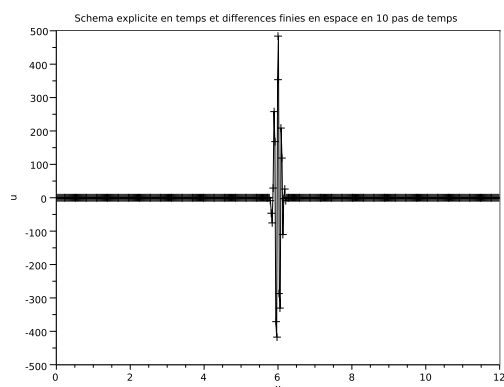


FIGURE 3. Défaut de stabilité du schéma (19).

On peut comprendre ce phénomène en calculant à la main les premiers itérés du schéma : on se rend compte que le schéma ne préserve pas la positivité des solutions (et plus généralement, les extrema ne sont pas préservés) et crée des oscillations dont l'amplitude va devenir rapidement très grande.

On introduit alors une variante de ce schéma en posant

$$(20) \quad u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2},$$

les termes additionnels ayant pour effet de stabiliser le schéma. Pour exploiter cette méthode numérique, on doit préciser les valeurs extrêmes du vecteur inconnu impliquées dans le schéma ; ici, j décrivant $\{1, \dots, J = [L/\Delta x]\}$, on prendra

$$(21) \quad u_0 = u_1 \quad \text{et} \quad u_{J+1} = u_J.$$

La figure 4 montre l'évolution de $u = \partial_x p$ obtenue par ce schéma, en partant de la donnée initiale¹

$$(22) \quad u^{\text{init}}(x) = \mathbb{1}_{[1.8, 4.2]}(x) + b\mathbb{1}_{[6.6, 7.8]}(x) - \mathbb{1}_{[4.2, 6.6]}(x) - b\mathbb{1}_{[7.8, 9]}(x),$$

avec $b = 0.5$, alors que la figure 5 donne l'évolution de p vérifiant $\partial_t p = -f(u)$ correspondante.

Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

1. Cette donnée est "bien choisie" ; en considérant d'autres états initiaux, on obtient des résultats qualitativement de même nature mais avec de possibles anomalies numériques localisées sur certains points.

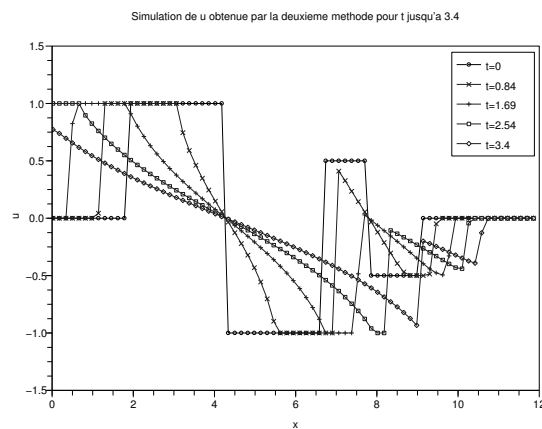


FIGURE 4. Évolution de la solution u du problème non linéaire.

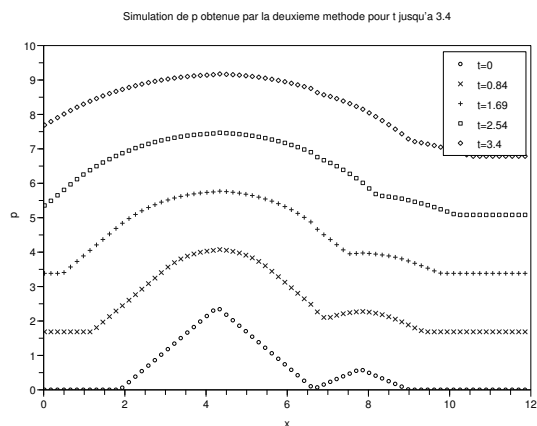


FIGURE 5. Évolution du front de flamme.

- On pourra détailler certains arguments mathématiques qui ne sont que brièvement esquissés dans le texte : justification du modèle, apparition de discontinuités...
- Le texte propose des stratégies numériques très différentes dans les sections 3.1 et 3.2 ; on pourra expérimenter et comparer les avantages et inconvénients de chacune de ces approches.
- Discuter et illustrer les comportements des différents schémas proposés. On pourra notamment détailler les questions de stabilité et de consistance.
- Vérifier que le schéma (20) proposé à la fin du texte vérifie bien, dans le cas linéaire $f(s) = -cs$, la propriété : si pour tout j , $u_j^0 \in [-M, +M]$, alors $u_j^n \in [-M, +M]$ pour tous n, j pourvu que $|c|\Delta t/\Delta x \leq 1$.
- On pourra présenter d'autres méthodes numériques. Par exemple, tester un schéma décentré en espace.
- On modifiera le modèle par exemple en prenant en compte des variations en espace et/ou en temps de la vitesse de propagation c .