

UN MODÈLE DE BATTEMENT DU COEUR

Résumé : On étudie les phénomènes électriques accompagnant le battement cardiaque, ou plus précisément, le comportement électrique d'une cellule cardiaque, en essayant de mettre en évidence des propriétés mathématiques significatives. On donne une définition générale des phénomènes oscillatoires avec relaxation. On propose un modèle analogique de la contraction d'une cellule du cœur comme exemple d'un phénomène oscillatoire avec relaxation. Ce modèle conduit à l'équation de Van der Pol, dont on rappelle des propriétés qualitatives. On insiste sur le problème de la validation du modèle en soulignant les relations avec les résultats de Van der Pol et Van der Mark au début du vingtième siècle.

Thème applicatif, mots clefs : Comportement qualitatif des équations différentielles, méthodes numériques pour la solution des équations différentielles.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Modèle du battement du cœur et oscillations avec relaxation.

Déjà à la fin du dix-neuvième siècle, on savait que l'activité cardiaque est associée à la production d'une quantité de courant électrique. On a commencé à quantifier ce courant au début du vingtième siècle (électrocardiogramme). La cellule cardiaque est une cellule polarisée qui a, le long de sa paroi, une série de dipôles, chargés positivement sur la surface externe et négativement sur la surface interne, quand le cœur est au repos (diastole). Quand la cellule est excitée, il y a une chute de la constante diélectrique de la membrane et on a donc des charges négatives qui passent à l'extérieur. Ce phénomène se poursuit jusqu'à la dépolarisation de la cellule, qui atteint alors l'état d'excitation (systole). Après un court délai, des processus physiques et chimiques *réparent* la cellule et la repolarisent. Le procédé de repolarisation est plus lent que celui de dépolarisation.

Le battement du cœur fait partie des systèmes naturels auto-excités (à partir de n'importe quelle condition initiale, le système approche rapidement un cycle limite stable) pour lesquels on peut remarquer des oscillations avec relaxation. En citant Van der Pol et Van der Mark, plusieurs phénomènes présentent ce type d'oscillations : *harpe éolienne, marteau pneumatique, grincement d'un couteau sur une assiette, mouvement d'un drapeau dans le vent, ... tube à néon, ... et, finalement, le battement du cœur.* Ces phénomènes se caractérisent par les propriétés suivantes :

UN MODÈLE DE BATTEMENT DU CŒUR

- Leur période est constante (temps de relaxation).
- La forme de l'onde est sensiblement différente d'une onde sinusoïdale.
- L'amplitude de l'onde est indépendante de la force extérieure appliquée pourvu que cette force soit assez *petite*.
- La période, en revanche, dépend de la force extérieure appliquée. Si celle-ci est périodique, le système de relaxation tend à se synchroniser pour devenir périodique avec la même période que celle de la force extérieure.

Pour donner un exemple de système auto-excités, on considère un circuit électrique **RLC**, décrit par la loi de Kirchoff, la loi de Faraday et la loi d'Ohm généralisée (non-linéaire). En notant par x l'intensité du courant dans l'inductance **L** et y la tension aux bornes du condensateur **C**, et en normalisant les constantes physiques, on obtient le système d'équations différentielles :

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = \varepsilon(y(t) - f(x(t))) \\ y'(t) = -x(t). \end{cases}$$

Si dans la loi d'Ohm généralisée, on choisit $f(x) = (1/3)x^3 - x$, le système (1) est appelé système de Van der Pol. Il peut se récrire :

$$(2) \quad x''(t)/\varepsilon + (x(t)^2 - 1)x'(t) + x(t) = 0.$$

On va essayer dans la Section 2 de montrer qu'en choisissant opportunément les paramètres, l'équation (2) peut décrire un système naturel auto-excité avec des oscillations avec relaxation.

2. Étude qualitative de l'équation de Van der Pol.

Dans cette section, on décrit brièvement quelques propriétés du système de Van der Pol, à $\varepsilon = 1$ fixé :

$$(3) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) - (1/3)x(t)^3 + x(t) \\ y'(t) = -x(t). \end{cases}$$

- le seul équilibre de (3) est $(0,0)$ et c'est une source,
- le problème de Cauchy pour (3) a une unique solution pour toute donnée initiale,
- les trajectoires tournent dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'origine,
- il y a une unique solution périodique non triviale que l'on appelle γ ,
- les autres trajectoires (non triviales) s'approchent de γ en tournant.

La démonstration des trois premières propriétés est assez simple et utilise des méthodes bien connues (par exemple l'étude du comportement des trajectoires autour d'un point d'équilibre par linéarisation, le théorème de Cauchy Lipschitz et enfin une partition opportune de l'espace des phases).

La démonstration des deux derniers résultats est plus délicate et utilise, entre autre, l'étude de l'application $\delta : \{0\} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $\delta(p) = (|\alpha(p)|^2 - |p|^2)$ où l'application $\alpha : \{0\} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \{0\} \times \mathbf{R}_-$ est définie de la façon suivante : on considère la trajectoire de (3) : $\phi_t(p)$ qui à l'instant initial se trouve au point p ; il existe un premier instant $t^* > 0$ où la trajectoire rencontre l'ensemble $\{0\} \times \mathbf{R}_-$, et on définit $\alpha(p) = \phi_{t^*}(p)$.

On montre qu'il existe un $r > 0$ tel que $\delta(p) > 0$ si $0 < |p| < r$ et $\delta(p)$ décroît pour $|p| > r$ et

UN MODÈLE DE BATTEMENT DU CŒUR

$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \delta(p) = -\infty$. Cela implique qu'il existe un unique $q_0 > 0$ tel que $\delta(q_0) = 0$. On peut donc démontrer que la trajectoire $\phi_t(q_0)$ est périodique. On montre aussi la dernière propriété avec la même méthode.

On utilise le schéma de Runge Kutta classique pour déterminer le diagramme des phases (cf Fig. 1, à gauche) et le graphe de la fonction $x(t)$ avec des données initiales différentes (cf Fig. 1, à droite). Les résultats numériques reflètent bien les prévisions théoriques.

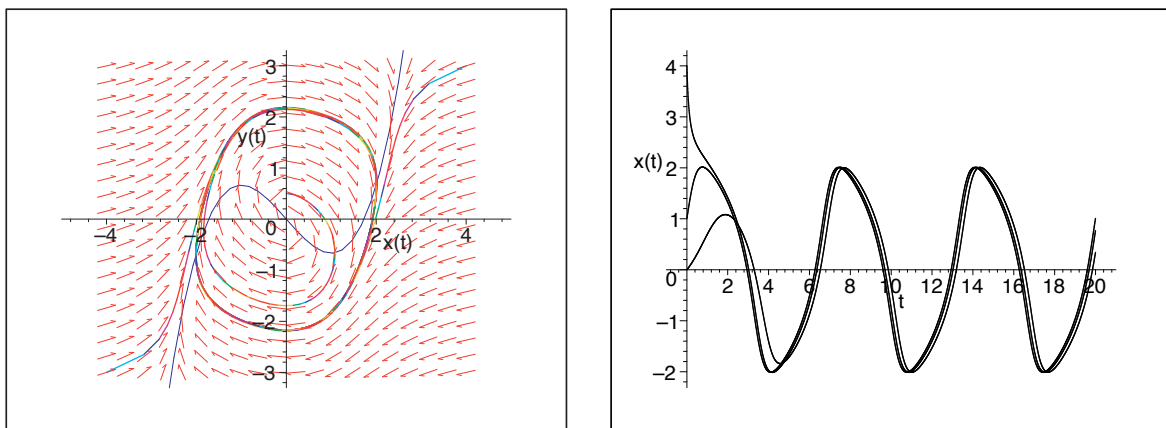


FIG. 1. diagramme des phases (à gauche) et graphes des solutions de (3) (à droite).

3. Choix du paramètre ε .

On essaye de choisir ε pour obtenir un comportement oscillatoire avec relaxation, avec pour but principal d'obtenir des oscillations sensiblement non sinusoïdales. Pour cela, on remarque que si $0 < \varepsilon < 1$, on obtient numériquement des courbes presque sinusoïdales. Si $\varepsilon \leq 0$, on peut montrer que le comportement qualitatif des solutions n'est pas celui recherché.

On est donc amené à considérer des valeurs positives et élevées du paramètre ε . Par exemple, pour $\varepsilon = 20$, on a le comportement décrit par la figure 2.

Dans le diagramme des phases de la figure 2, on peut aussi remarquer que quand ε est grand, certaines parties de la trajectoires et de la courbe $y = f(x)$ sont très proches l'une de l'autre. Cela est cohérent avec l'équation (1). On va étudier ce phénomène dans la Section 4. On va choisir donc ε positif et "grand", (dans les exemples, on prendra $\varepsilon = 100$).

UN MODÈLE DE BATTEMENT DU CŒUR

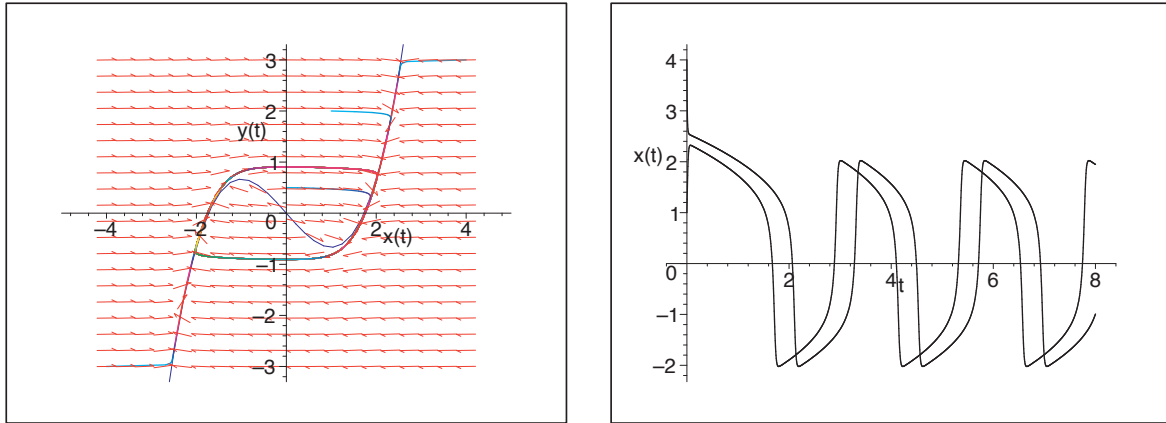


FIG. 2. diagramme des phases (à gauche) et graphes des solutions de (2) (à droite) pour $\varepsilon = 20$.

4. Période et amplitude asymptotiques.

On va déterminer la valeur asymptotique pour $\varepsilon \rightarrow +\infty$ de la période de la solution périodique (période fondamentale) de

$$(4) \quad \begin{cases} x'(t)/\varepsilon = y(t) - (1/3)x(t)^3 + x(t) \\ y'(t) = -x(t). \end{cases}$$

On remarque que la composante x varie très rapidement (sa dérivée est de l'ordre de ε), sauf si $y \sim f(x)$. Sur la partie de la trajectoire où y et $f(x)$ ne sont pas proches, on peut changer l'échelle du temps : $\tau = \varepsilon t$. Avec ce changement d'échelle, la deuxième équation dans (4) devient $\frac{dy}{d\tau} = \frac{-x}{\varepsilon}$, ce qui implique que $y \sim \text{constante}$. Ceci est cohérent avec les résultats numériques donnés dans la figure 2.

En revanche, si $y \sim f(x)$, la deuxième équation dans (4) devient $f'(x) \frac{dx}{dt} \sim -x$ et peut être intégrée pour donner implicitement x en fonction de t .

On peut maintenant estimer la période fondamentale T , puisque la solution passe beaucoup plus de temps dans les branches de la trajectoire où $y \sim f(x)$.

La trajectoire périodique est symétrique par rapport à l'origine. On peut se contenter d'étudier la partie de la trajectoire contenue dans le demi plan $x > 0$. Des calculs algébriques simples permettent de remarquer que les deux extrémités de la partie de la trajectoire où $y \sim f(x)$ sont $A = (2, 2/3)$ et $B = (1, -2/3)$. La période est alors approchée en intégrant (4) sur cette partie de la trajectoire :

$$(5) \quad \int_2^1 (x - 1/x) dx = - \int_0^{T/2} dt \quad \rightarrow T = 3 - 2 \log 2.$$

UN MODÈLE DE BATTEMENT DU CŒUR

On remarque qu'en général, même si on ne sait pas calculer analytiquement la primitive de $\frac{f'(x)}{x}$, on peut de toute façon calculer les points de maximum et minimum du cycle limite en étudiant la courbe $y = f(x)$.

Les résultats numériques donnés dans la figure 3 confirment cette estimation asymptotique. Des

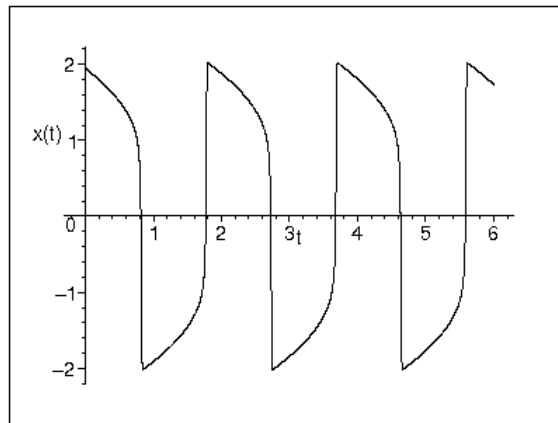


FIG. 3. Graphe d'une solution de (2) pour $\varepsilon = 100$, $T \approx 1.61$

tests numériques indiquent que cette estimation asymptotique n'est plus valable pour $\varepsilon \ll 10$.

Suggestions pour le développement

- ▶ *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
 - On pourra donner une démonstration des premières propriétés qualitatives du système (3).
 - On pourra donner une démonstration de l'existence et unicité d'un cycle limite pour le système (3).
 - On pourra critiquer le modèle dans son comportement qualitatif.
 - On pourra rappeler la modélisation d'un circuit **RLC**.
 - On pourra étudier le système (4) en faisant varier ε , quel comportement qualitatif peut-on s'attendre si $\varepsilon < 0$?
 - On pourra calculer numériquement le système (4) en faisant varier ε . En particulier on pourra déterminer numériquement la période à ε fixé et vérifier que, pour ε grand, elle s'approche de la valeur théorique asymptotique.

UN MODÈLE DE BATTEMENT DU CŒUR

- On pourra proposer comme modèle un autre choix de f , obtient-on des résultats satisfaisants si f est linéaire ?
- On pourra proposer des différents schémas numériques pour les différents systèmes (2) et (4) et l'on pourra en étudier l'ordre et la stabilité (asymptotique).
- On fixe le paramètre de relaxation $\varepsilon = 100$. On impose une force périodique $100 \cos((\pi/5)t)$ dans l'équation (2), (qui a donc pour amplitude 100 et pour période $P = 10$). Le système d'équations différentielles devient

$$(6) \quad \begin{cases} x'(t) = 100((y(t) - (1/3)x(t)^3 + x(t)) + (\pi/5) \sin((\pi/5)t)) \\ y'(t) = -x(t). \end{cases}$$

En intégrant sur trois périodes, établir le résultat numérique de la figure 4 (le pas de temps doit être choisi assez petit) :

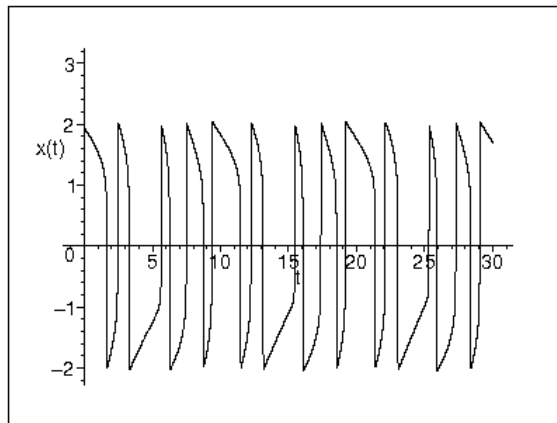


FIG. 4. Graphe d'une solution de (2) avec un forçage de $100 \cos((\pi/5)t)$, méthode RK4, pas de temps 0.004.