

Dynamique de la criminalité : modèles discrets et continus et analyse

Résumé : On s'intéresse à un modèle mathématique décrivant l'évolution de la criminalité dans une ville. On est ainsi conduit à considérer d'abord un système dynamique discret, puis un système d'équations de réaction-diffusion permettant de mettre en évidence la formation de « points chauds » de haute criminalité.

Mots clés : Systèmes dynamiques discrets. Équations aux dérivées partielles. Différences finies.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Description du comportement criminel

La description mathématique des événements criminels peut guider la mise en œuvre de politiques de prévention et/ou de répression. Les modèles que nous allons décrire permettent de prévoir l'évolution spatio-temporelle de zones de criminalité élevée. Ces modèles s'appuient sur deux constatations de nature sociologique : d'une part, les cambrioleurs « reviennent sur les lieux de leur forfait », opérant dans des zones où ils ont réussi à agir avec efficacité et dont ils maîtrisent l'environnement ; d'autre part, la répétition d'actes criminels dans une certaine zone en donne une image qui favorise l'émergence d'activités délictueuses (effet dit « des carreaux cassés »).

La ville est dans un premier temps représentée par un réseau discret sur $[0, L]$ constitué de N nœuds, séparés d'une distance $0 < \ell \ll L$ et repérés par des indices $i \in \{1, \dots, N\}$. Ces nœuds peuvent être identifiés à des habitations. (Une représentation bidimensionnelle serait bien sûr plus réaliste mais conduirait à des difficultés qui dépassent le cadre de cette discussion.) À chaque site, on associe une mesure de son attractivité, notée $A_i(t)$ et dépendant du temps. Cette quantité se décompose en une partie B_i^{ref} n'évoluant pas au cours du temps mais prenant éventuellement en compte des particularités locales, et une partie dynamique $C_i(t)$. L'évolution de l'attractivité du site i entre deux instants t et $t + h$ obéit aux principes suivants :

- l'occurrence d'un crime sur le site i augmente son attractivité,

- l'attractivité du site i est influencée par celles des sites voisins : le voisinage avec des sites de plus grande attractivité renforce l'attractivité du site i ,
- l'attractivité initiale et les effets de voisinage sont pondérés par un terme de mémoire caractérisé par un taux $\omega \geq 0$.

Ces considérations conduisent à définir l'attractivité dynamique à l'instant $t + h$, pour un intervalle de temps $h > 0$ fixé et tel que $0 \leq \omega h \leq 1$, par

$$(1) \quad C_i(t+h) = \left((1-\eta)C_i(t) + \frac{\eta}{2}(C_{i+1}(t) + C_{i-1}(t)) \right) (1-\omega h) + \theta E_i(t),$$

où tous les coefficients θ, ω, η sont positifs. En particulier, $0 \leq \eta \leq 1$ mesure l'influence du voisinage sur l'attractivité du site i . Dans (1), $E_i(t)$ est le nombre¹ de crimes commis sur le site i entre les instants t et $t + h$. Ce terme couple l'évolution de l'attractivité à l'évolution de la population criminelle. Un criminel présent sur le site i peut avoir deux comportements : ou bien, avec une probabilité $p_i(t)$, il effectue un méfait entre t et $t + h$, ou bien, sans commettre d'acte répréhensible, il se déplace sur un site voisin. Le nombre d'événements délictueux commis par un criminel donné sur le site i durant un intervalle $[t, t + h]$ dépend de l'attractivité : il suit une loi de Poisson de paramètre $A_i(t)h$. Ainsi la probabilité qu'un de ces criminels enfreigne la loi durant l'intervalle de temps $[t, t + h]$ est donnée par

$$(2) \quad p_i(t) = 1 - e^{-A_i(t)h}.$$

Le forfait accompli, le criminel disparaît du réseau (par exemple, il part revendre le fruit de son cambriolage). Naturellement, le nombre d'actes délictueux commis sur le site i entre t et $t + h$ est alors déterminé par $E_i(t) = n_i(t)p_i(t)$ où $n_i(t)$ est le nombre de délinquants présents sur le site i à l'instant t . Le déplacement des criminels est régi par le fait qu'ils s'éloignent peu d'une zone d'opérations déterminée. Cependant, ils se déplacent vers les zones de plus forte attractivité. Ceci conduit à définir la probabilité de déplacement du nœud i au nœud $j \in \{i-1, i+1\}$ par

$$(3) \quad \frac{A_j(t)}{A_{i-1}(t) + A_{i+1}(t)}.$$

Finalement, l'évolution de la criminalité est décrite par le système suivant, où $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$(4) \quad \begin{cases} C_i(t+h) = \left(C_i(t) + \frac{\eta}{2}(C_{i+1} + C_{i-1} - 2C_i)(t) \right) (1-\omega h) + \theta n_i(t)(1 - e^{-A_i(t)h}), \\ n_i(t+h) = A_i(t) \left(\frac{n_{i+1}(t)e^{-A_{i+1}(t)h}}{A_i(t) + A_{i+2}(t)} + \frac{n_{i-1}(t)e^{-A_{i-1}(t)h}}{A_i(t) + A_{i-2}(t)} \right) + Sh. \end{cases}$$

Ainsi, le nombre de criminels sur le site i est augmenté d'une part par le déplacement de criminels venus de sites voisins, et d'autre part par le terme source S . La question des conditions aux limites pour ce système est très délicate. Pour simplifier, on imposera par la suite des conditions de périodicité :

$$(5) \quad \text{pour tout } k, \quad C_{N+k}(t) = C_k(t), \quad n_{N+k}(t) = n_k(t),$$

1. mais qui n'est pas forcément un entier.

où N est le nombre de sites.

Un cas particulier intéressant consiste à supposer le système spatialement homogène, c'est-à-dire que $B_i^{\text{ref}} = B_\star^{\text{ref}}$ ne dépend pas du site considéré. Dans ce cas, le système admet une solution homogène et stationnaire

$$(6) \quad \mathcal{C}_\star = \frac{\theta S}{\omega}, \quad n_\star = \frac{Sh}{1 - e^{-(B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star)h}}.$$

Les simulations numériques de ce modèle discret permettent de mettre en évidence des comportements très différents suivant les valeurs des paramètres. On prend pour donnée initiale une perturbation de l'état d'équilibre :

$$(7) \quad \begin{cases} C_i(0) = \mathcal{C}_\star \left(1 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi\Omega i}{3}\right) + 0.05 \cos(3\pi\Omega i)\right), \\ n_i(0) = n_\star \left(1 + 0.01 \cos\left(\frac{2\pi\Omega i}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + 0.05 \cos\left(3\pi\Omega i + \frac{\pi}{7}\right)\right). \end{cases}$$

Les paramètres sont fixés de la manière suivante :

	N	L	ℓ	B_\star^{ref}	ω	Ω	θ	S	η	h
Cas 1	100	1	1/N	1/30	7/15	0.33	1.16	0.02	0.02	1/30
Cas 2	100	1	1/100	1/30	1/15	0.33	1.16	0.02	0.06	1/30
Cas 3	100	1	1/100	1/30	1/15	0.33	1.16	0.02	0.07	1/10

On compare les résultats au même temps final $T = 1000$ ($T = h \times \text{nombre d'itérations}$). Les comportements des Cas 1 et 2 sont reportés sur la figure 1 : on observe ou bien la formation de « points chauds » de forte attractivité et où la densité de criminels est plus importante, ou bien une situation plus homogène, avec une présence criminelle réduite. Dans le Cas 3 la solution relaxe rapidement vers l'état d'équilibre.

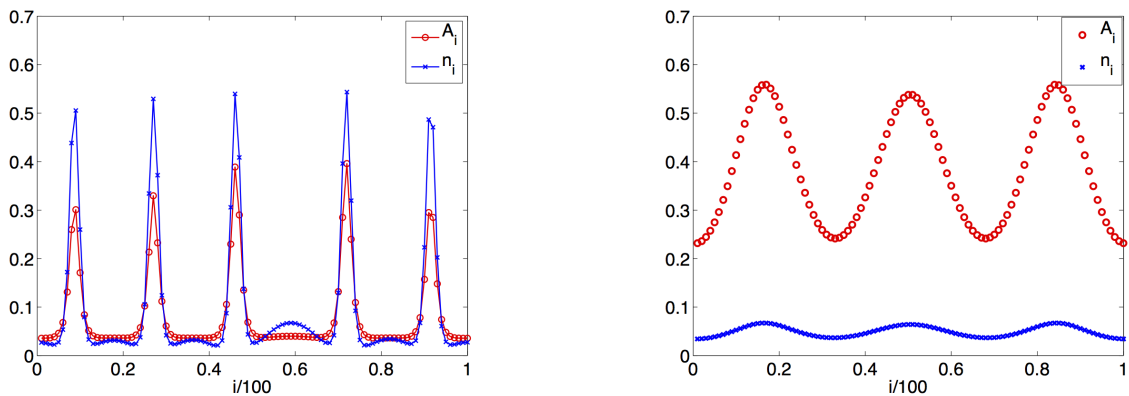


FIGURE 1. Formation de points chauds : Cas 1 (à gauche) et Cas 2 (à droite).

2. Modèle continu

On peut remplacer le modèle discret en temps-espace par un modèle continu via les arguments de mise à l'échelle suivants :

- on considère le régime $0 < \ell \ll 1$, $0 < h \ll 1$ avec la contrainte $\ell^2/h = D$, une constante positive;
- on suppose de plus que $S = \ell^2 s$ et $\theta h = \epsilon$ où $s > 0$ et $\epsilon > 0$ sont fixés;
- les coefficients $C_i(t)$ et $\frac{n_i(t)}{\ell^2}$ sont interprétés comme des approximations des valeurs de fonctions régulières \mathcal{C} et ρ respectivement, aux points $t = kh$ (avec $k \in \mathbb{N}$, $h > 0$) et $x = i\ell$.

Pour simplifier, on supposera de plus que $B^{\text{ref}} = B_\star^{\text{ref}}$ est homogène. Ces considérations amènent à voir les différences discrètes comme des approximations de dérivées des fonctions \mathcal{C} ou ρ . En exploitant des développements limités des fonctions \mathcal{C} et ρ , on se rend compte que, dans ce régime particulier, l'essentiel de la dynamique peut être décrit par le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C} = \frac{\eta D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{C} - \omega \mathcal{C} + \epsilon D \rho \mathcal{A}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho - \frac{2\rho}{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A} \right) - \rho \mathcal{A} + s, \end{cases}$$

avec $\mathcal{A} = B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}$. Ainsi \mathcal{C} est soumis à des dynamiques de diffusion et de réaction avec l'environnement auxquelles s'ajoute un amortissement. La population criminelle est soumise à des effets combinés de diffusion, de transport dans le sens des plus fortes attractivités, et de réaction à l'environnement auxquels s'ajoute la source naturelle s . Comme pour le cas discret, on supposera le problème complété par des conditions de périodicité, avec $x \in (0, L)$.

On remarque que les constantes

$$(9) \quad \mathcal{C}_\star = \frac{\epsilon D s}{\omega}, \quad \rho_\star = \frac{s}{B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star}$$

définissent des solutions stationnaires (et homogènes) de ce système. On va maintenant en étudier la stabilité. À cette fin, on considère des solutions qui s'écrivent comme des perturbations de l'état stationnaire. Supposant que la perturbation est petite, on aboutit au système linéarisé suivant

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} c = \frac{\eta D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} c - \omega c + \epsilon D ((B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star) r + \rho_\star c), \\ \frac{\partial}{\partial t} r = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} r - \frac{2\rho_\star}{B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star} \frac{\partial}{\partial x} c \right) - (B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star) r - \rho_\star c. \end{cases}$$

On cherche des solutions de ce système de la forme $e^{\sigma t} \cos(kx)(\delta_c, \delta_r)$. Ceci amène au système linéaire

$$(11) \quad \begin{pmatrix} -\frac{\eta D}{2} k^2 - \omega + \epsilon D \rho_\star & \epsilon D (B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star) \\ \frac{D \rho_\star}{B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star} k^2 - \rho_\star & -\frac{D}{2} k^2 - B_\star^{\text{ref}} - \mathcal{C}_\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_c \\ \delta_r \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \delta_c \\ \delta_r \end{pmatrix}.$$

L'existence d'une solution non triviale avec $\sigma > 0$ est équivalente au fait que le déterminant

$$(12) \quad \eta \frac{D^2}{4} k^4 - \frac{D}{2} (3D\epsilon\rho_\star - \omega - \eta(B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star)) k^2 + \omega(B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star)$$

soit négatif. Cette condition peut être réalisée pour certaines valeurs de k , lorsque

$$(13) \quad 3D\epsilon\rho_\star - \omega - \eta(B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star) \geq 2\sqrt{\eta\omega(B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_\star)}.$$

On peut alors déterminer² la valeur de k pour laquelle le taux de croissance σ est maximal.

3. Simulations numériques

L'analyse du système d'équations aux dérivées partielles complet est délicate et reste encore en partie ouverte. Les simulations numériques peuvent mettre en évidence certains comportements remarquables des solutions. En particulier, comme l'a déjà indiqué l'analyse du problème linéarisé, la présence de termes de couplage et de termes convectifs peut conduire à des phénomènes complexes et les solutions peuvent avoir un comportement beaucoup plus riche que celui des solutions de simples équations de diffusion. Afin de mettre en évidence de tels comportements, on introduit un schéma numérique adapté. Étant donné un pas de temps $\Delta t > 0$ et un pas d'espace $\Delta x = 1/J > 0$ et supposant connus $(\mathcal{C}^k, \rho^k) \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$, le schéma itératif est défini en résolvant les systèmes linéaires suivants : pour $j \in \{1, \dots, J\}$, en posant $\mathcal{A}_j^k = B_\star^{\text{ref}} + \mathcal{C}_j^k$

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\mathcal{C}_j^{k+1} - \mathcal{C}_j^k}{\Delta t} &= \frac{\eta D}{2} \frac{\mathcal{C}_{j+1}^{k+1} + \mathcal{C}_{j-1}^{k+1} - 2\mathcal{C}_j^{k+1}}{\Delta x^2} - \omega \mathcal{C}_j^{k+1} + \epsilon D \rho_j^k \mathcal{A}_j^k, \\ \frac{\rho_j^{k+1} - \rho_j^k}{\Delta t} &= -\rho_j^{k+1} \mathcal{A}_j^{k+1} + s + \frac{D}{2} \frac{\rho_{j+1}^{k+1} + \rho_{j-1}^{k+1} - 2\rho_j^{k+1}}{\Delta x^2} \\ &\quad - \frac{D}{\Delta x} \left(\frac{\ln(\mathcal{A}_{j+1}^{k+1}) - \ln(\mathcal{A}_j^{k+1})}{\Delta x} \frac{\rho_{j+1}^{k+1} + \rho_j^{k+1}}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ln(\mathcal{A}_j^{k+1}) - \ln(\mathcal{A}_{j-1}^{k+1})}{\Delta x} \frac{\rho_j^{k+1} + \rho_{j-1}^{k+1}}{2} \right). \end{aligned}$$

On utilise les conditions de périodicité quand cela est nécessaire, c'est-à-dire

$$(15) \quad \rho_0^{k+1} = \rho_J^{k+1}, \quad \rho_{J+1}^{k+1} = \rho_1^{k+1}, \quad \mathcal{C}_0^{k+1} = \mathcal{C}_J^{k+1}, \quad \mathcal{C}_{J+1}^{k+1} = \mathcal{C}_1^{k+1}.$$

2. Par exemple en utilisant un logiciel de calcul formel.

La figure 2 montre la formation de points chauds, au temps final $T = 0.7$: elle est réalisée avec les données $J = 500$, $\Delta t = 10^{-2}$, $B^{\text{ref}} = B_{\star}^{\text{ref}} = 0.03$, $s = 1$, $\epsilon = 1$, $\omega = 5$, $\eta = 0.01$, $D = 1$ et les données initiales

$$(16) \quad \begin{cases} \mathcal{C}(0, x) = \mathcal{C}_{\star} \left(1 + 0.1 \cos\left(\frac{2\pi\Omega x}{3}\right) + 0.08 \cos(3\pi\Omega x) \right), \\ \rho(0, x) = \rho_{\star} \left(1 + 0.1 \cos\left(\frac{2\pi\Omega x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + 0.08 \cos\left(3\pi\Omega x + \frac{\pi}{7}\right) \right), \end{cases}$$

pour $\Omega = 9$. On pourra comparer cette situation avec le cas où $\eta = 0.1$.

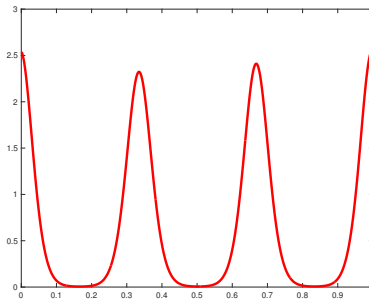


FIGURE 2. Formation de points chauds : attractivité au temps final $T = 0.7$ (domaine avec $L = 1$).

Suggestions et pistes de réflexion

- *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*
 - Détailler la mise en équations présentée succinctement dans le texte.
 - Réaliser des simulations numériques du modèle discret.
 - Développer le passage de la modélisation discrète à la modélisation continue (les calculs qui mènent à l'équation pour ρ sont assez délicats et on pourra se contenter d'en esquisser les grandes lignes et détailler plus précisément comment établir l'équation pour \mathcal{C}).
 - Détailler l'analyse de stabilité linéaire du système d'équations de réaction-diffusion. De manière plus générale, on pourra expliquer comment on peut décrire les solutions de (10) en termes de séries de Fourier.
 - Commenter la construction du schéma numérique de la section 3 (ou proposer une autre méthode).
 - Réaliser des simulations du problème continu.