

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

RAPPORT D'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2015

Par Monsieur AMATTAT MOHAMED
Professeur de L'Enseignement Supérieur
Président du Jury

SOMMAIRE

✚ COMPOSITION DU JURY.....	3
✚ INTRODUCTION.....	4
✚ DÉROULEMENT DU CONCOURS ET STATISTIQUES	
❖ DEROULEMENT DE LA SESSION DE 2015.....	6
❖ RESULTATS GENERAUX.....	7
✚ SOMMAIRES SUR LES NOTES OBTENUES	
❖ REPARTITION DES NOTES DES EPREUVES ECRITES.....	8
❖ REPARTITION DES NOTES DES EPREUVES ORALES.....	12
❖ CORRELATION DES NOTES DES EPREUVES ECRITES ET ORALES	15
❖ BILAN DES EPREUVES ECRITES ET COMPARAISON.....	16
❖ BILAN DES EPREUVES ORALES ET COMPARAISON.....	17
❖ EVOLUTION DU NOMBRE DE CANDIDATS.....	18
✚ DÉROULEMENT DES EPREUVES ORALES.....	20
✚ COMPTE RENDU DES EPREUVES DE 2015	
❖ COMMISSION D'ANALYSE ET PROBABILITE.....	24
❖ COMMISSION D'ALGEBRE ET GEOMETRIE.....	26
❖ COMMISSION DE MODELISATION ET CALCUL SCIENTIFIQUE.....	28
✚ ANNEXE 1: PROBLEME de MATHEMATIQUES GENERALES.....	62
✚ ANNEXE 2: PROBLEME d'ANALYSE ET PROBABILITES.....	63
✚ ANNEXE 3 : LISTES DE LEÇONS, SESSION	64
✚ ANNEXE 4 : PROGRAMME D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES DU SECOND DEGRE.....	68
✚ ANNEXE 5 : BIBIOGRAPHIE.....	78

COMPOSITION DU JURY

Liste des membres du jury de l'agrégation de mathématiques

AMATTAT Mohamed	Président du jury - Professeur de l'enseignement Supérieur CFIE – Rabat
OKACHA Diyer	Professeur agrégé de mathématiques, chargé d'inspection en CPGE ; CNIPE –Rabat
CHABCHI Allal	Professeur agrégé en classes préparatoires 2 ^{ème} année MP, Marrakech
Maarouf Hamid	Professeur de l'Enseignement Supérieur-Faculté Poly disciplinaire de Safi-Université Cadi Ayyad
ELMOUNTASIR Driss	Professeur agrégé en classes préparatoires 2 ^{ème} année MP, Kénitra
AZHARI Abdelhak	Professeur de l'Enseignement Supérieur-Ecole Normale Supérieure de Casablanca
ELKAHOUI M'hammed	Professeur de l'Enseignement Supérieur-Faculté des Sciences Université Cadi Ayyad
BEDAA ABDELOUHAB	Professeur de l'enseignement Supérieur CFIE – Rabat
HBA Ahmed	Professeur de l'Enseignement Supérieur-Faculté des Sciences Université Hassan II
HAMRAOUI Hinda	Professeur de l'Enseignement Supérieur-Faculté des Sciences Université Hassan II
OUKNINE Youssef	Professeur de l'Enseignement Supérieur, et directeur de l'école Nationale des Sciences Appliquées de Marrakech.
ROUX Daniel	Maître de Conférences, chargé d'une mission d'enseignement en classes préparatoires au lycée Descartes à Rabat.
TAIBI Mimoun	Professeur agrégé en classes préparatoires 2 ^{ème} année MP, Rabat

INTRODUCTION

La session 2015 du concours d'agrégation de mathématiques aura été charnière. D'une part, c'est la première session ouverte depuis cette année aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instauré aux C.R.M.E.F du Royaume. Ce cycle de formation dure deux ans et est ouvert après concours aux étudiants titulaires d'un master et aux ingénieurs d'Etat ainsi qu'aux professeurs de second cycle titulaires d'une licence avec trois années d'ancienneté. D'autre part, elle fait suite à la réforme de l'épreuve de modélisation calcul et scientifique. L'année 2015 est considérée comme une année de transition pendant laquelle nous avons fait cohabiter textes et leçons : Contrairement à leurs prédécesseurs, les candidats qui ont subi les épreuves orales du concours ont été confrontés à une nouvelle épreuve de modélisation qui comprenait deux éléments, à savoir le choix d'une leçon, dans la pure tradition du concours ou le choix d'un texte.

Au terme de la préparation, les candidats subissent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves de l'écrit, sous la présidence d'un jury français et en présence de représentants français. Les épreuves sont envoyées en France pour correction. Le président du jury marocain s'associe au jury qui se réunit en France pour procéder au déchiffrement des résultats et à la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant un jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission.

L'année universitaire 2014-2015 a été marquée par le fait qu'il y avait des candidats ingénieurs d'état parmi les candidats officiels.

La session 2015 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine s'est caractérisée par le même nombre de postes offerts par rapport à la session précédente : 20 postes. Une très nette augmentation du nombre des inscrits au concours : Le nombre de candidats inscrits était de 99 (contre 61 en 2014), ce qui correspond à une augmentation de 62%, et le nombre de candidats ayant composé aux deux épreuves était de 53, en augmentation significative (de 70,96%).

16 candidats ont été déclarés admissibles (contre 14 en 2014) et leur moyenne était de 07,55/20 (07,2 en 2014), le dernier admissible ayant 5,25/20 (5,12 en 2014).

9 candidats ont été déclarés admis et leur moyenne était de 10,28/20 (11,27 en 2014).

Ce rapport du jury se veut formatif, il a pour objectif d'aider au mieux les candidats à mieux se préparer à la session 2016.

Nous espérons que les conseils apportés dans ce rapport permettront aux futurs candidats de se préparer comme il se doit à cette épreuve, en s'appuyant également sur les nombreux ouvrages cités dans la bibliographie.

En ce qui concerne le déroulement du concours, je tiens à remercier vivement l'ensemble de mes collègues membres du jury, le directeur du CRMEF de Rabat au sein duquel se tenaient les oraux, et qui, depuis le début des épreuves orales, n'a ménagé aucun effort pour la réussite de ce concours .

Je voudrais, également, remercier l'Unité Centrale de la Formation des Cadres qui, depuis le début des épreuves orales, n'a ménagé aucun effort, que ce soit sur le plan moral ou matériel, pour la réussite de ce concours.

DÉROULEMENT DU CONCOURS ET STATISTIQUES

DEROULEMENT DE LA SESSION DE 2015

❖ Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Epreuve écrite de mathématiques générale (durée : 6 heures): mercredi 11 mars 2015
- Epreuve écrite d'analyse et de probabilité (durée : 6 heures) : jeudi 12 mars 2015.

Les délibérations pour l'admissibilité (pour tous les candidats français et marocains) ont eu lieu le 23 mai 2015 au lycée Jean-Pierre Vernant 21 rue du docteur Gabriel Ledermann, à Sèvres sous la présidence du jury de l'agrégation externe de mathématiques, Monsieur Charles Torossian et en présence du président du jury de l'agrégation marocaine de mathématiques.

❖ Les épreuves orales se sont déroulées selon le programme suivant :

- **Lundi 08 juin 2015 à partir de 12h au CRMEF de Rabat**
 - 14h : Préparation des couplages et mise sous enveloppes ;
 - Elaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve ;
 - 15h30 : Réunion d'accueil présidée par M. AMATTAT, président du jury ;
 - 16h : Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats ;
 - 16h30 : Tirage au sort par les candidats des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves ;
 - Inspection de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôles des ouvrages apportés par les candidats, par les membres du jury.
- **Du mardi 09 au jeudi 11 juin 2015 : Déroulement des épreuves orales ;**
 - **Jeudi 11 juin 2015 de 19h à 20h : délibérations ;**
 - **Jeudi 11 juin 2015 vers 20h : Proclamation des résultats.**

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves :

- Analyse et probabilités ;
- Algèbre et géométrie ;
- Modélisation et calcul scientifique

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	99
Postes mis au concours	20
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	53
Candidats admissible	16
Candidats admis	09

Tableau 1- résultats généraux de la session 2015

Classes préparatoires :

Candidat admis et proposés par le jury pour effectuer un stage probatoire en CPGE :

- Bousfih Mourad
- Boutadghart Aimad
- Dahmouni Mohammed
- Elkoufi Mohamed
- Erraji Zouhir
- Essamet Mahmoud
- Essanhaji Abdelhak
- Layadi Mohamed Zakaria
- Morji Ahmed

SOMMAIRES SUR LES NOTES OBTENUES

REPARTITION DES NOTES DES EPREUVES ECRITES

1-REPARTITION DES ADMISSIBLES SELON LEUR SEXE

Parmi les admissibles on trouve une femme (6.25 %) et 15 hommes (93.75 %)



Figure 1 : Répartition des admissibles selon leur sexe

2-REPARTITION DES ADMISSIBLES SELON LEUR AGE

Les caractéristiques descriptives de la variable âge sont résumées dans le tableau suivant :

N	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
16	24	36	28,5	2,58

Tableau 1 : Les caractéristiques descriptives de la variable âge

La répartition des admissibles selon leur âge est présentée dans le tableau suivant :

Age	Effectif	Pourcentage
24	1	6.25
26	1	6.25
27	3	18.75
28	4	25
29	4	25
30	1	6.25
31	1	6.25
36	1	6.25
Total	16	100

Tableau 2 : Répartition des admissibles selon leur âge

3-REPARTITION DES NOTES DES EPREUVES ECRITES

On donne ci-dessous et pour chaque épreuve écrite la suite par ordre décroissant des notes obtenues par les candidats marocains admissibles.

Mathématique générale (notes sur80)	Analyse et probabilité (notes sur80)
48	53
41	50
38	45
37	39
37	38
35	34
31	31
29	29
29	29
25	27
24	22
22	22
20	22
20	20
18	19
18	15

Tableau 3 : Répartition des notes des épreuves écrites

Le jury de l'agrégation française de mathématiques avait fixé pour tous les candidats la barre d'admissibilité à 40/160

Répartition du classement par ordre croissant des étudiants marocains admissibles sur 2017 candidats:

134-195-208-279-347-379-473-484-621-654-687-687-744-744-765-786

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite.

	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
Mathématique générale (note sur 20)	4,50	12,00	7,37	2,27
Analyse et probabilité (note sur 20)	3,75	13,25	7,73	2,85
Total écrit (note sur 160)	42,00	101,00	60,43	18,543

Tableau 4 : Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

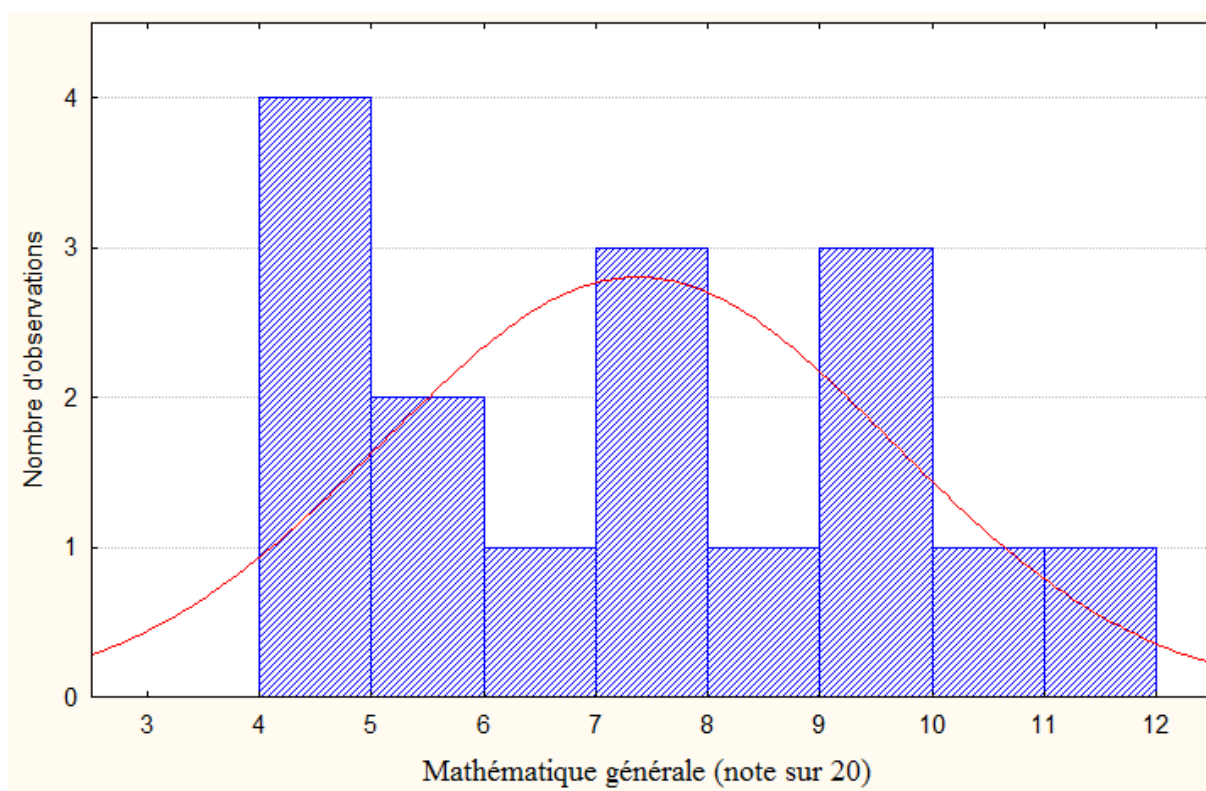


Figure 2 : Histogramme de la note à l'épreuve Mathématique générale

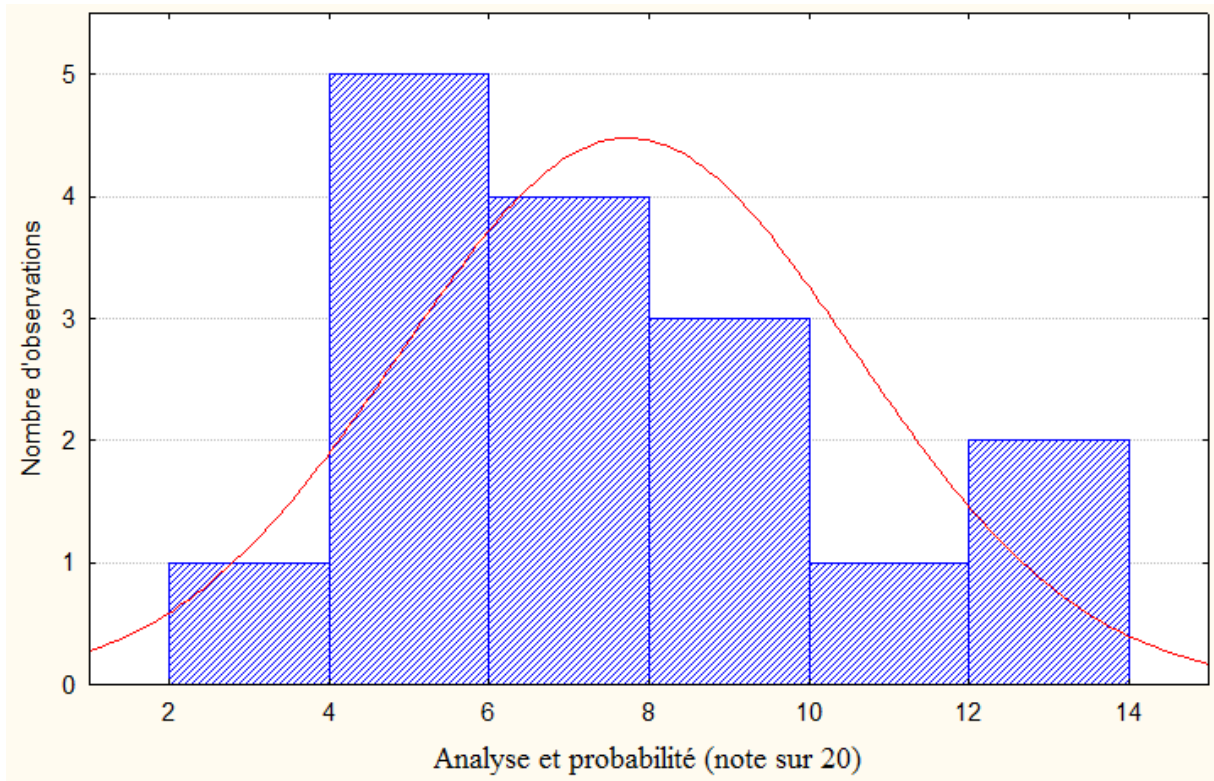


Figure 3 : Histogramme de la note à l'épreuve Analyse et Probabilité

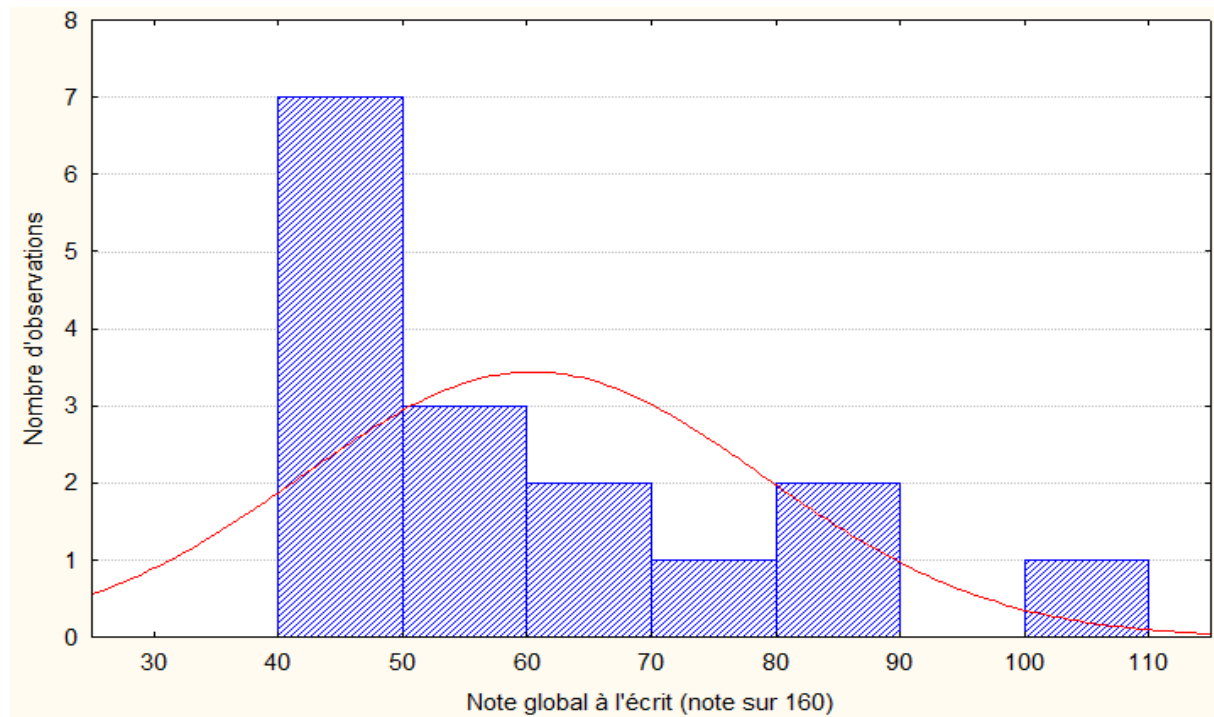


Figure 4 : Histogramme de la note globale à l'écrit (note sur 160)

REPARTITION DES NOTES DES EPREUVES ORALES

On donne ci-dessous et pour chaque épreuve orale la suite des notes obtenues par les candidats marocains admissibles.

Algèbre et géométrie (notes sur 80)	Analyse et probabilité (notes sur 80)	Modélisation et calcul scientifique (notes sur 80)
58	44	60
56	48	55
54	48	67
60	56	21
48	38	46
53	40	39
60	41	31
58	40	24
42	40	37
64	40	15
57	31	30
28	31	35
24	44	22
45	24	16
17	26	39
AB	AB	AB

Tableau 5 : Répartition des notes des épreuves orales

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale.

	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	17,00	64,00	48,26	14,469
Analyse et probabilité (notes sur 80)	24,00	56,00	39,40	8,57
Modélisation et calcul scientifique (note sur 80)	15,00	67,00	35,80	15,77
Total oral (note sur 240)	82,00	169,00	123,46	27,36

Tableau 6 : Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

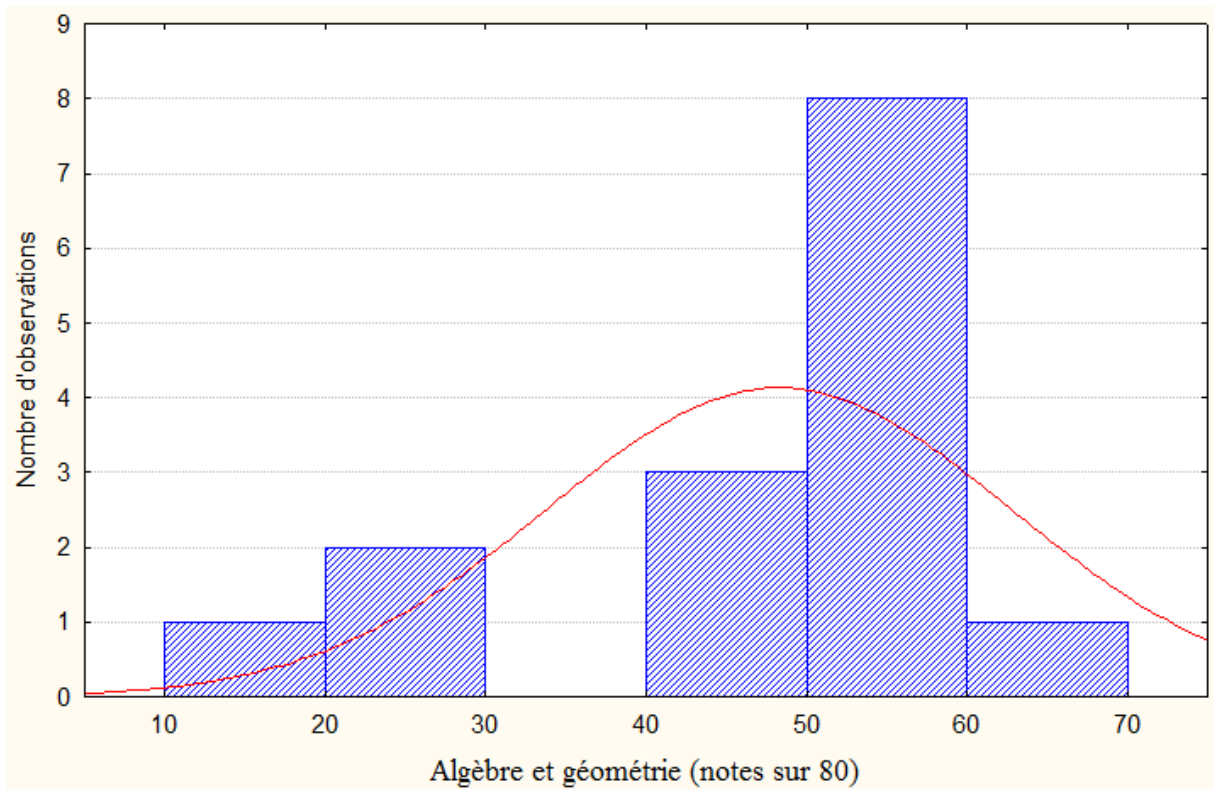


Figure 5 : Histogramme de la note à l'épreuve Algèbre et géométrie (note sur 80)

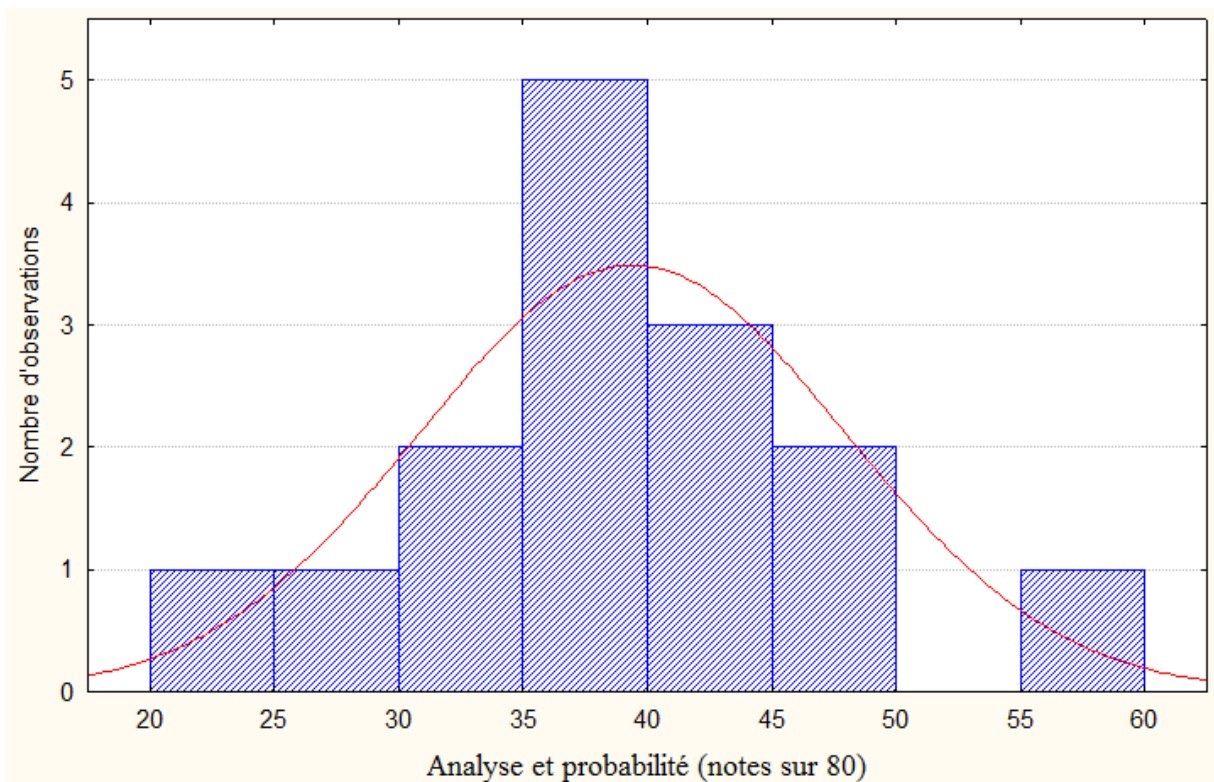


Figure 6 : Histogramme de la note à l'épreuve Analyse et Probabilité (note sur 80)

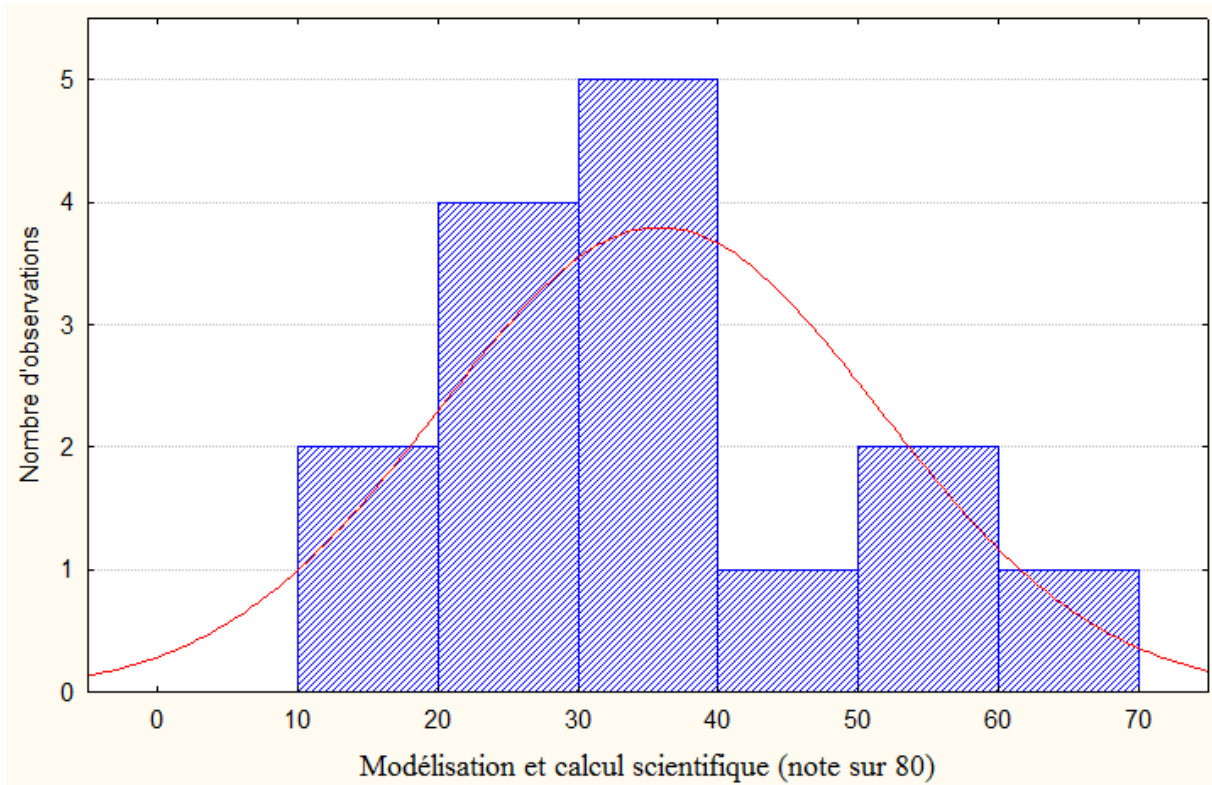


Figure 7 : Histogramme de la note à l'épreuve Modélisation et calcul scientifique (note sur 80)

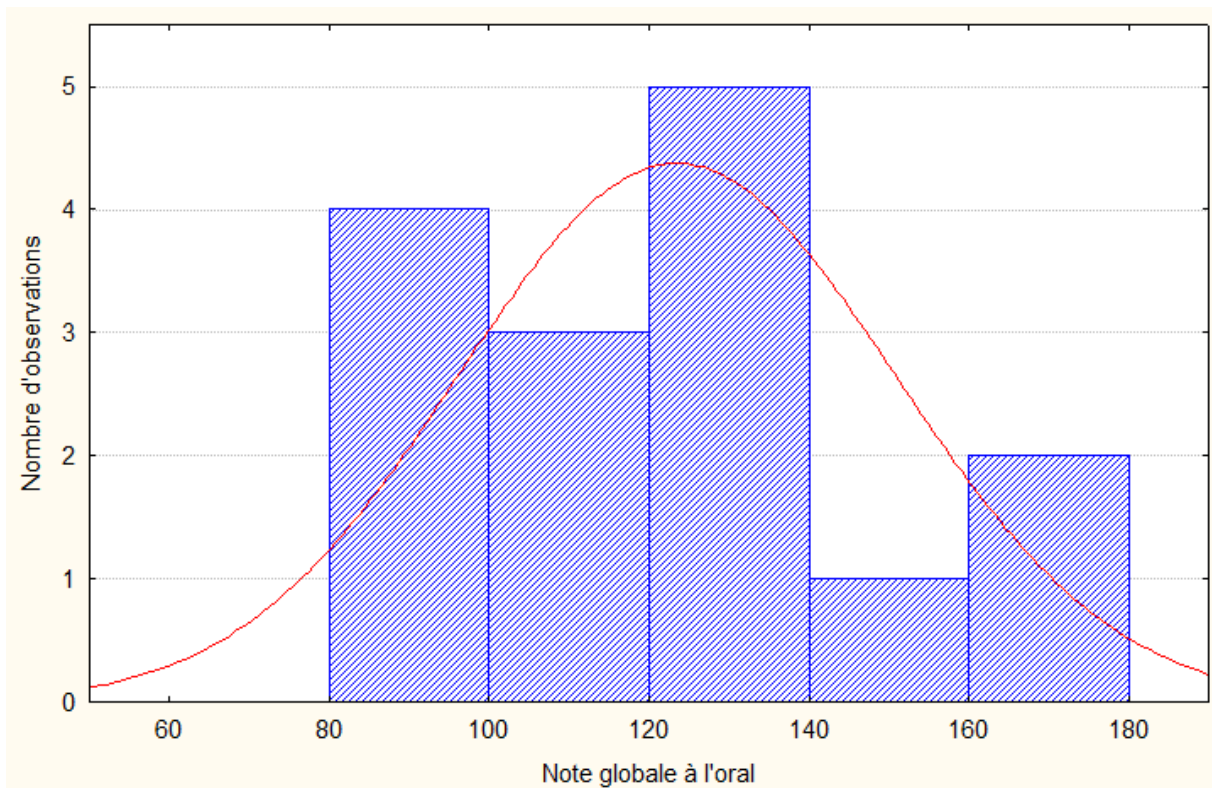


Figure 8 : Histogramme de la note globale à l'oral (note sur 240)

CORRELATION DES NOTES DES EPREUVES ECRITES ET ORALES

On donne ci-dessous les différentes corrélations entre les notes aux différentes épreuves. Le tableau suivant résume l'ensemble des corrélations entre les notes.

	MG	AP écrit	AG	AP orale	MCS
MG	1	0.61	0.51	0.50	0.60
AP écrit	0.61	1	0.42	0.68	0.73
AG	0.51	0.42	1	0.48	0.05
AP orale	0.50	0.68	0.48	1	0.27
MCS	0.60	0.73	0.05	0.27	1

Tableau 7 : La matrice de corrélation entre les notes

MG : Mathématique Générale

AP : Analyse et Probabilité

MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

On observe que l'élément Modélisation et calcul scientifique se distingue des autres épreuves de l'oral, en effet sa corrélation avec les deux autres épreuves de l'oral est très faible (0.27 et 0.05).

Mais globalement, il y'a une forte corrélation entre la note globale à l'écrit et la note globale à l'oral ($r = 0.91$)

Remarque :

La corrélation est au sens de Pearson.

✚ BILAN DES EPREUVES ECRITES ET COMPARAISON

Effectifs détaillés des épreuves écrites de 2012 et 2015

Année	2012		2013		2014		2015	
Epreuve	Mathématique générale	Analyse et probabilité	Mathématique générale	Analyse et probabilité	Mathématique générale	Analyse et probabilité	Mathématique générale	Analyse et probabilité
Inscrits	77	77	63	63	61	61	99	99
Présents	44	44	41	42	32	32	53	53
Absents	33	33	22	21	29	29	46	46
Moyenne de l'épreuve sur 20	8,63	9,95	7,95	8,90	8,48	5,93	7,37	7,73

✚ La moyenne générale pour chaque épreuve écrite des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2012		2013		2014		2015	
Nombre d'admis	15		20		14		16	
Epreuve	Mathématique générale	Analyse et probabilité	Mathématique générale	Analyse et probabilité	Mathématique générale	Analyse et probabilité	Mathématique générale	Analyse et probabilité
Moyenne sur 20	8,63	9,95	7,95	8,90	8,48	5,93	7,37	7,73

✚ La moyenne générale pour les épreuves de l'écrit des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2012	2013	2014	2015
Ayant composé	15	20	14	16
Moyenne des épreuves sur 20	9,29	8,42	7,20	7,55

✚ BILAN DES EPREUVES ORALES ET COMPARAISON

- La moyenne générale pour chaque épreuve orale des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année Section	2012			2013			2014			2015		
	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS
Ayant subit l'épreuve orale	13	13	13	19	18	18	13	13	12	15	15	15
Moyenne de l'épreuve sur 80	38,23	36,69	32,76	40,24	42,66	38,94	40,15	39,31	33,41	48,26	39,4	35,8

MG : Mathématique Général
 AP : Analyse et Probabilité
 MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

- La moyenne générale pour les épreuves de l'oral des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2012	2013	2014	2015
Ayant composé	13	20	13	16
Moyenne des épreuves sur 80	35,89	41,91	37,62	41,15

- La moyenne générale pour chaque épreuve orale des candidats marocains admis est comme suit :

Année Nombre d'admis	2012			2013			2014			2015		
	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS
Epreuve	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS	MG	AP	MCS
Moyenne sur 80	50,50	47,50	41,16	50,27	47,6	48,5	49,28	46,4	39,5	54,3	39,4	35,8

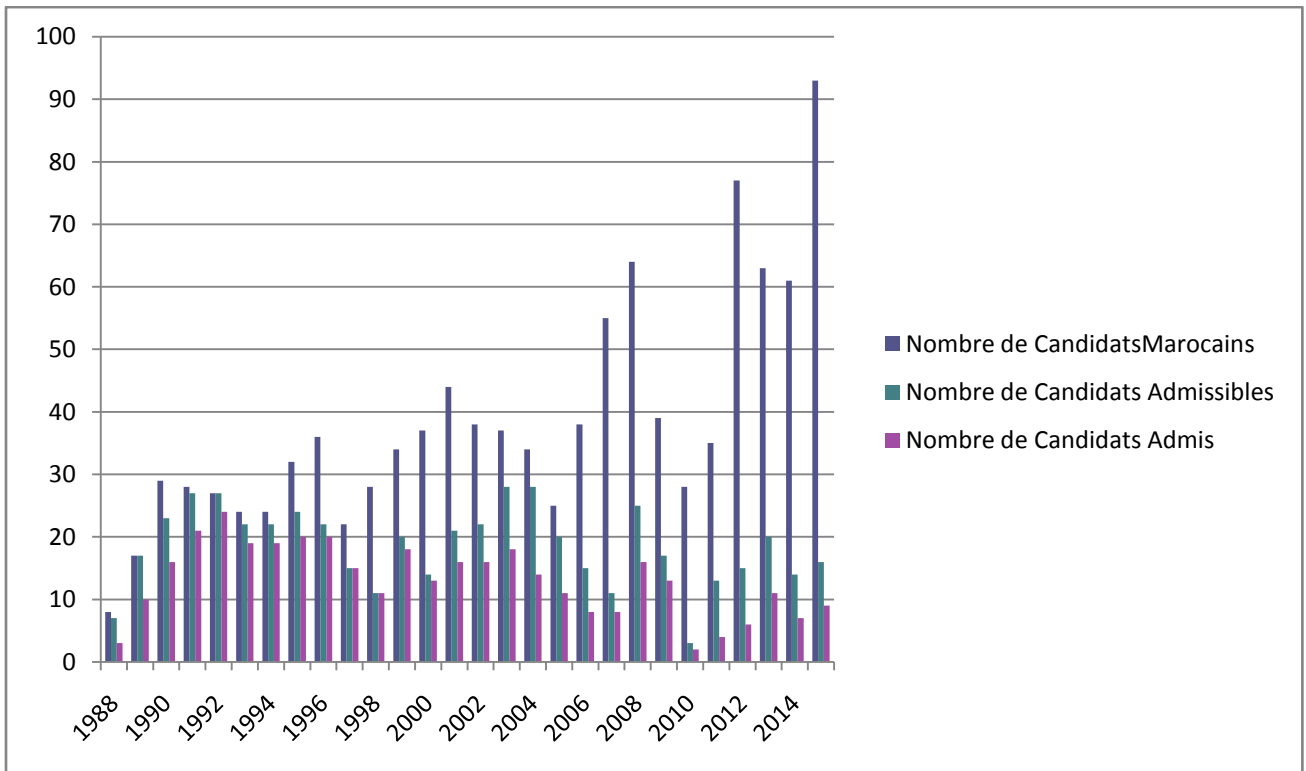
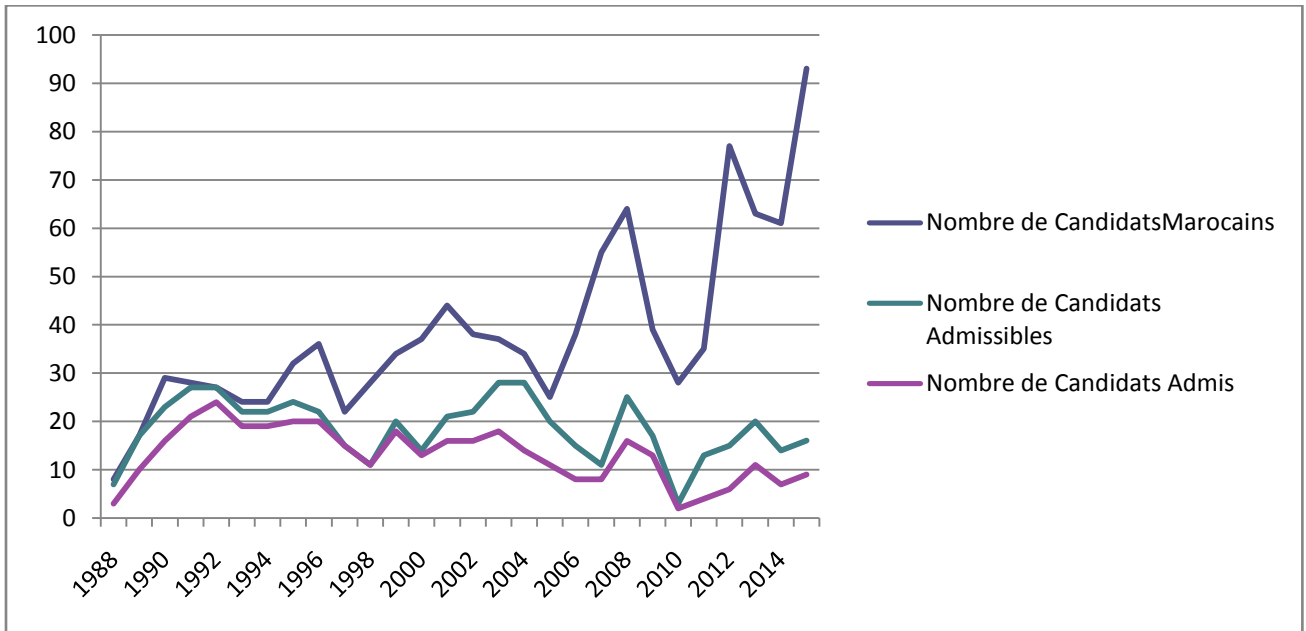
- La moyenne générale des candidats marocains admis est comme suit :

Année	2012	2013	2014	2015
Ayant composé	13	18	13	16
Moyenne des épreuves sur 80	46,38	48,8	45,09	46,81

EVOLUTION DU NOMBRE DE CANDIDATS

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

ANNEE	Nombre de Candidats Marocains	Nombre de Candidats Admissibles	Nombre de Candidats Admis
1988	8	7	3
1989	17	17	10
1990	29	23	16
1991	28	27	21
1992	27	27	24
1993	24	22	19
1994	24	22	19
1995	32	24	20
1996	36	22	20
1997	22	15	15
1998	28	11	11
1999	34	20	18
2000	37	14	13
2001	44	21	16
2002	38	22	16
2003	37	28	18
2004	34	28	14
2005	25	20	11
2006	38	15	08
2007	55	11	08
2008	64	25	16
2009	39	17	13
2010	28	03	02
2011	35	13	04
2012	77	15	06
2013	63	20	11
2014	61	14	7
2015	93	16	9



DEROULEMENT DES ÉPREUVES ORALES

Le rapport qui suit, précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats ; ainsi que les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise aux épreuves orales.

Modalités pratiques

Oral 1: Epreuve d'algèbre et géométrie

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de 3h pour le préparer. Durant cette préparation le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation mais n'a pas accès à Internet (ni bien-sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique).

Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- 1- Ils doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés),
- 2- Ils doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 au maximum et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc. pour qu'il soit le plus lisible possible. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ: une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 6 minutes maximum, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré : il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications.

Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Il faut veiller à rester au niveau de l'Agrégation. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement.

Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. Il est essentiel que le candidat maîtrise ce qu'il propose. Il doit s'attendre à ce que le jury lui pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon. Le but est de voir le candidat dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique : faire une analyse de l'exercice, établir des liens avec les résultats connus (qui peuvent être ceux du plan), proposer des calculs et raisonnements pouvant conduire à la solution de la question posée. La qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Oral 2 : d'analyse et probabilités :

Les mêmes modalités qu'à l'épreuve d'algèbre et géométrie s'appliquent.

Oral 3 de "modélisation et calcul scientifique" :

Le candidat tire au sort une enveloppe dans laquelle il y a deux textes. Il choisit un texte et dispose de 4 heures de préparation, pendant lesquelles il dispose des ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation. Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Ils doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés)
- Ils doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral

Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les textes sont surmontés du bandeau suivant:

- Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.

Et se terminent par le texte suivant :

- Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.

L'interrogation dure 1 heure, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions. Le candidat

dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Maple, Scilab, Matlab et Python . Les supports informatiques (USB, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique comme par exemple des clés usb personnelles. Une imprimante sera mise à disposition des candidats dans la salle de préparation.

Dans cette épreuve, le candidat est appelé à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème concret en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer le plan qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant.

COMPTE RENDU DES EPREUVES 2015

❖ COMMISSION ANALYSE ET PROBABILITE

APPRECIATIONS DU JURY SUR LES CANDIDATS (PAR ORDRE DE PASSAGE)

- **Candidat 01** : Connexité. Exemples et applications. Leçon n°4
(Non choisi : Esperance, variance et moment d'une variable aléatoire. Leçon n°41)
Le plan manque d'exemples et d'applications et illustrations géométriques.
Pour le développement, on a eu un bon départ et le candidat n'a pas pu mener à bien la dernière étape.
Le candidat n'a pas pu répondre à toutes les questions (des lacunes et difficultés en général)
- **Candidat 02** : Espaces vectoriels només, applications. Exemples. Leçon n°8
(Non choisi : Suites de variables de Bernoulli indépendantes. Leçon n°38)
Le plan est assez bien, mais manque sur des transformations géométriques
Pour ce qui est du développement, le candidat a aboutit avec difficultés.
Les réponses aux questions sont convenables avec l'aide des membres de jury.
- **Candidat 03** : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
Leçon n°24.
(Non choisi : Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivations au sens de distribution.
Leçon n°45)
Le plan est très élémentaire et manque d'exemples et d'applications.
Le candidat a très mal présenté le sujet.
Pour ce qui est du développement, le candidat a aboutit avec l'aide du jury, sur un résultat élémentaire.
Le candidat a eu beaucoup de difficulté quand aux réponses aux questions.
- **Candidat 04** : Exemples de parties dense et applications. Sujet n°2.
(Non choisi : Fonctions développables en séries entières, fonctions analytiques
Exemples. Leçon n°34)
Le plan est assez correct
La présentation est convenable.
Pour ce qui est de la présentation, elle est assez bien.
Le candidat a eu quelques difficultés à répondre à certaines questions
- **Candidat 05**: Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et application.
(Non choisi : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications)
Absence des grands théorèmes classique dans le plan et un manque frappant d'exemples et de contre exemple.
Le développement est convenable.
Ses réponses aux questions des membres de jury étaient convaincantes.
- **Candidat 06** : Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.
(Non choisi : Utilisation de la notion de convexité en analyse)
Le plan est maigre et manque de résultats importants.
Beaucoup de lacunes sur des résultats élémentaires.

Le candidat n'a pas pu répondre à toutes les questions des membres du jury.
Le développement est assez correct.

- **Candidat 07** : Applications des formules de Taylor sujet n°15.
(Non choisi: Illustration par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs réelles sujet n°29)
Plan est maigre et manque d'applications et notamment en dimension supérieur.
L'exposé est assez correct avec quelques erreurs rectifiées par les membres de jury.
Il a réagit à certaines questions et n'a pas pu répondre à d'autres questions.
- **Candidat 08** : Séries de nombres réels ou complexes, comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples. Sujet n°25.
(Non choisi : Théorèmes de point fixe. Exemple et applications. Sujet n°6)
Le plan est assez bien dans l'ensemble , il lui manque des résultats intéressants.
Pour ce qui est du développement, le candidat a bien menu ses réponses.
Pour les questions, le candidat n'a pas répondu à certaines questions et il manque de technicités.
- **Candidat 09** : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales. Sujet n°37
(Non choisi: Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et Applications. Sujet n°12)
Le plan est assez correct malgré le manque d'applications.
L'exposé est moyen.
Pour le développement, le candidat s'est retrouvé en difficulté.
Pour les questions, quelques difficultés.
- **Candidat 10** : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
Exemples et applications. Sujet n°30.
(Non choisi :Espaces complets. Exemples et applications. Sujet n°5)
Le plan est moyen
L'exposé est assez correct.
Pour ce qui est du développement, le candidat a pu arriver à bout par l'appui des membres de jury.
Pour les questions, il a pu s'en sortir avec beaucoup d'hésitation.
- **Candidat 11** : Suites numériques, convergence, valeur d'adhérence. Exemples et applications. Sujet n°20.
(Non choisi : Etude métrique des courbes. Exemples. Sujet n°13)
Le plan est convenable, de même pour son exposé.
Le développement est correct et de bonnes réponses aux questions.
- **Candidat 12** : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples. Sujet n°32.
(Non choisi: Sous-variétés de \mathbb{R}^n . Exemples. Sujet n°14)
Le plan très élémentaire avec des hypothèses très large.
L'exposé est élémentaire
Le développement n'a pas pu aboutir sous l'appui des membres de jury.
Beaucoup de difficultés aux questions, des réponses assez évassives par manque de connaissances
- **Candidat 13** : Utilisation de la notion de compacité. Sujet n°3.
(Non choisi : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications. Sujet n° 39)
Le plan est léger et manque des résultats intéressants
Le sujet est bien.
Le développement ,le candidat a pu le mener à bien

La réaction aux questions est moyenne

- **Candidat 14** : Espaces de fonction. Exemples et applications. Sujet n°1.
(Non choisi: Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. Sujet n°33)
Le plan est insuffisant.
La présentation est moyenne.
Le développement est difficile, il a pu s'en sortir à l'aide des idées des membres de jury.
Pour les questions, le candidat n'a pas pu répondre à toutes les questions posées.

❖ Commission d'Algèbre et Géométrie

APPRECIATIONS DU JURY SUR LES CANDIDATS (PAR ORDRE DE PASSAGE)

- **Candidat 01** : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et Applications.
(Non choisi : Groupes des nombres. Exemples et applications)
Plan : acceptable.
Un seul développement qui a abouti plus au moins
Réactions assez bonnes.
- **Candidat 02** : dimension d'un espace vectoriel (se limiter au cas de la dimension finies). Rang. Exemples et applications.
(Non choisi: Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient)
Plan: Insuffisant
Développements : deux proposés- celui traité est abouti avec indication.
Réponses aux questions: moyennes.
- **Candidat 03**: Méthodes combinatoire, problèmes de dénombrement
(Non choisi : coniques applications)
Plan: bien
Développements : trois proposés, celui traité est abouti.
Réaction assez bonne.
- **Candidat 04**: Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
(Non choisi: Applications des nombres complexes à la géométrie)
Plan: bon plan
Développements: abouti avec indications, il en a proposé deux.
Réponses aux questions: assez bonnes
Bonne communication
- **Candidat 05**: Polynômes d'endomorphisme en dimension finie- réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
(Non choisi: groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications)
Plan: bon
Développements: aboutis
Réactions : bonne

- **Candidat 06:** Déterminant. Exemple et Applications
(Non choisi: Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications)
Plan : Pas de rigueur, erroné, manque de précision.
Développements: non aboutis, il en a proposé deux celui choisi n'était pas bien formulé.
Réactions: A travers les réponses, le candidat a montré ses lacunes et sa non maîtrise des notions de base.
- **Candidat 07:** Formes linéaires et hyper plans en dimension finie. Exemple et Applications.
(Non choisi: nombres premiers. Applications)
Plan: bon.
Développements: deux développements, celui choisi est abouti
Réponses : bonnes
Communication: très moyenne.
- **Candidat 08 :** Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (de dimension finie)
(Non choisi: Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Applications)
Plan: Pas organisé.
Développements: il en a proposé deux, celui choisi a tribuché sur son développement, ceci reflète la non maîtrise du sujet
Réactions aux questions : insuffisantes
Communication: bonne.
- **Candidat 09:** Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
(Non choisi: Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, orthogonalité, isotropie. Applications)
Plan: complet – cependant l'ordre aurait pu être meilleur- le candidat a commencé par la réduction en lieu des polynômes.
Développements: abouti avec maîtrise.
Réponses : Convaincantes
Communication: Bonne
- **Candidat 10 :** Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
(Non choisi: Anneaux principaux. Applications)
Plan: Incomplet-n'a pas touché l'essentiel du theme à traiter
Développements:Elle a proposé deux themes, celui choisit montre que le niveau de la candidate est très modeste.
Communication: bonne
- **Candidat 11 :** Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
(Non choisi: Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications Applications)
Plan: acceptable, cependant, le candidat a oublié les techniques de calcul.
Développements:Un seul proposé- abouti avec des indications.
Réactions aux questions:Bonne.
- **Candidat 12 :** Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

(Non choisi: Exponentielle de matrices. Applications.)

Plan: Bien structuré

Développements: Le candidat a proposé deux, celui traité a abouti.

Réaction: Bonnes

- **Candidat 13** : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

(Non choisi: Extensions de corps. Exemples et applications.)

Plan :.Ne répond pas aux normes de la leçon-Le candidat n'a pas compris le theme de la leçon

Développements:Le theme proposé est faux.

Réactions aux questions: Mauvaises, maladroit

- **Candidat 14** : Exponentielle de matrices. Applications

(Non choisi: Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.)

Plan :.Acceptable

Développements: Le candidat a proposé deux, celui choisi a été fait correctement.

Réactions aux questions:assez bonnes

- **Candidat 15**: Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.applications (Non choisi: Nombres premiers. Applications)

Plan :.Bon-achevé avec plusieurs applications

Développements:Le candidat a proposé deux, celui choisi a abouti avec des indications

Réactions aux questions:Bonnes et montrent que le candidat maîtrise les notions qu'il expose.

❖ Commission de Modélisation Calcul Scientifique

Rapport du sous-jury de l'épreuve Modélisation-Calcul Scientifique

L'oral de la session 2015 de l'Agrégation de Mathématiques du Maroc a concerné 16 candidats. L'épreuve de Modélisation-Calcul Scientifique s'est déroulée sur 6 demi-journées, à raison de trois candidats pour chacune des demi-journées 1 à 5 et d'un candidat la demi-journée 6.

Choix des sujets

Chacun des candidats a eu le choix entre un sujet de leçon classé que choisi au hasard dans la liste des 26 sujets de Modélisation-Calcul Scientifique et un sujet sous forme de texte suivi de suggestions de développement.

Les textes ont été répartis au hasard par demi-journée, les candidats travaillant de façon isolée pendant les quatre heures de préparation. Rappelons que les candidats disposent pendant cette préparation d'un ordinateur équipé de logiciels adaptés à l'épreuve (Python, Scilab, Maple) et des ouvrages- livres de cours et de travaux dirigés - de la bibliothèque de l'Agrégation de Mathématiques du Maroc.

Dans le tableau suivant nous encadrons les choix effectués par les 15 candidats classés 1

NC	SL	ST	NC	SL	ST	NC	SL	ST
1	a	A	6	f	B	11	j	A
2	b	A	7	b	C	12	k	E
3	c	A	8	g	C	13	l	E
4	d	B	9	h	D	14	m	E
5	e	B	10	i	D	15	n	F

Où NC= numéro du candidat, SL= sujet-leçon, ST = sujet-texte selon le codage développé ci dessous :

✓ Références des leçons choisies (dans une liste de 30 sujets de leçon)

a : Exponentielle d'une matrice carrée, exemples et applications.

b : Exemples de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires. Comparaisons.

c : Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Exemples.

d : Applications de la notion de convexité.

e : Illustrer à l'aide d'exemples l'utilisation des congruences et des corps finis.

f : Méthodes de moindres carrés. Applications.

g : Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres.

h : Équations différentielles, appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée.

i : Méthodes de calcul exact ou approché d'intégrales. Applications.

j : Pgcd, ppcm, théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Applications.

k : Problèmes liés à la représentation et au tracé de courbes et de surfaces.

l : Résultats conduisant à l'approximation ou à l'interpolation des fonctions. Applications.

m : Systèmes autonomes d'équations différentielles. Illustrations, exemples.

n : Méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynômes.

✓ Références des textes choisis (indication des thèmes, l'intégralité de chacun des textes se trouve en annexe)

A : Système de production, Léontieff.

B : Risque de faillite, Panjer.

C : Système proies-prédateurs, Lotka-Volterra.

D : Sudoku, Groebner.

E : Stratégie optimale d'investissement.

F : Traffic routier.

Format des textes : les textes sont courts, environ 5 pages, motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Ils ne contiennent pas d'assertions délibérément trompeuses et se terminent par une liste de suggestions.

Déroulement de l'épreuve

Comme les années précédentes le candidat passe devant le jury pendant environ 1h15. Le candidat dispose en fin de préparation d'un accès à la photocopieuse du Concours et peut donc imprimer en plusieurs exemplaires le texte de sa présentation.

Dans le cas d'une leçon il expose d'abord un plan synthétique de la leçon d'une durée de 15 minutes (environ) ; puis il indique les parties qu'il souhaite développer :

(1) au niveau des illustrations informatiques et des possibilités de modélisation

(2) au niveau plus théorique de démonstrations des théorèmes utilisés, des algorithmes présentés

Le jury choisit parmi ces développements et le candidat dispose alors de 20 à 25 minutes environ pour présenter son travail et ses réflexions.

La partie finale consiste pour le candidat à répondre aux questions du jury sur le thème de la leçon ou sur des problèmes mathématiques en relation avec ce thème.

Dans le cas d'un texte le candidat présente un exposé construit à partir du sujet, en gérant comme il le désire présentation orale, présentation écrite au tableau et illustrations informatiques video-projetées.

Cet exposé doit tenir en 40 minutes environ. Les 30 dernières minutes sont à l'initiative du jury qui pose des questions en rapport avec l'exposé, avec le texte et plus généralement avec les mathématiques qui se rattachent au thème traité.

Commentaires rapides sur les leçons présentées en 2015

1. Exponentielle d'une matrice carrée, exemples et applications.

L'exposé commence par rappeler la notion de norme, en particulier dans le cas d'un espace de matrices. L'exponentielle de M est définie comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Les propriétés de e^M sont exposées. Viennent ensuite quelques exemples et applications. Le candidat calcule e^M pour des matrices de petite taille à l'aide du logiciel Maple.

Les questions du jury laissent entrevoir des possibilités non exploitées (applications aux systèmes d'équations différentiels notamment) ainsi que des lacunes sur les propriétés de $M \rightarrow e^M$. Des réponses erronées à plusieurs questions du jury ne permettent pas d'accorder une bonne note à la prestation du candidat.

2. Le candidat expose l'essentiel du contenu du texte et les résultats de théorie spectrale en rapport avec le thème. Il présente des méthodes numériques de calcul de rayon spectral. Les questions du jury reçoivent quelques réponses, pas toujours correctes et justifiées.

3. Le texte est partiellement compris. Un objectif important du sujet est la recherche d'une solution à termes positifs du problème linéaire (la positivité étant ici fondamentale pour les applications en économie). Ce point est mal dégagé par le candidat ce qui fait perdre beaucoup d'intérêt aux résultats présentés.

Les réponses aux questions du jury sont assez souvent décevantes.

Le programme informatique, à partir de la méthode de Jacobi, ne fonctionne pas.

4. Le texte est partiellement compris. L'exposé du candidat montre clairement des lacunes dans ses connaissances en Calcul des Probabilités et en Analyse, particulièrement quand il s'agit d'utiliser des propriétés de convexité. Beaucoup d'erreurs dans les réponses aux questions du jury.

5. Le candidat expose l'essentiel du contenu du texte, dégage des pistes de réflexion en rapport avec le texte, présente avec une certaine aisance les outils mathématiques reliés.

Il répond à plusieurs questions du sujet cpge inclus dans le texte, et sait faire le lien avec les objectifs du texte. Il propose un programme itératif en rapport avec le sujet.

Les questions du jury obtiennent quelques réponses satisfaisantes.

6. Le texte est partiellement compris. Le développement informatique ne fonctionne pas. Le développement de quelques problèmes mathématiques en relation avec le texte n'est pas bien mené.

Les réponses aux questions du jury sont assez souvent décevantes.

7. Exemples de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires. Comparaisons.

Exposé plutôt hors sujet, pas d'exemples, pas de comparaisons.

Des erreurs dans les réponses aux questions du jury. Un programme informatique qui ne fonctionne pas bien.

8. Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres.

Exposé théorique présentant plusieurs méthodes, avec des idées pour les comparer. Programme informatique élémentaire, en Maple, qui fonctionne.

Beaucoup de difficultés à répondre aux questions du jury.

9. Équations différentielles, appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée.

Exposé présentant le problème, les résultats théoriques intéressants, des méthodes de calcul. En particulier les méthodes numériques à 1 pas, à 2 pas, à 4 pas. Des applications sont envisagées ainsi que la comparaison de diverses méthodes.

Programme informatique en Python, qui fonctionne. Les comparaisons annoncées dans l'exposé sont visualisées sous forme graphique.

Les réponses aux questions sont dans l'ensemble satisfaisantes.

10. Le texte est compris et l'exposé intéressant. Un programme informatique (recherche de base de Groebner) est présenté. Les questions du jury révèlent des lacunes importantes sur les théories mathématiques en relation avec le thème (sur les anneaux en particulier).

11. Le plan proposé expose les idées du texte, mais celui-ci est assez mal compris.

Le candidat manque de connaissances en Algèbre et le développement théorique laisse beaucoup à désirer.

La notion d'idéal n'est pas bien assimilée. Les réponses aux questions du jury sont insatisfaisantes.

12. Les idées et les problématiques du texte sont bien exposées. Les résultats théoriques développés correctement. Un programme de simulation est présenté et fonctionne.

Des difficultés pour répondre à certaines questions du jury, même sur des résultats de base comme le théorème central limite.

13. Résultats conduisant à l'approximation ou à l'interpolation des fonctions. Applications.

Le candidat expose la méthode d'interpolation de Lagrange, les différences divisées, les bases de Newton. Il donne des applications aux calculs d'intégrales. Le développement théorique porte sur les polynômes de Lagrange. Un programme informatique utilisant le logiciel Python propose la méthode de Simpson.

Le candidat n'aborde pas la question d'une majoration de l'erreur (dans tous les calculs approchés envisagés dans sa présentation). Les réponses aux questions du jury sont décevantes.

14. Systèmes autonomes d'équations différentielles. Illustrations, exemples.

Exposé léger sur le sujet. La méthode d'Euler sur un exemple et un théorème de Lyapounov sont proposés en développement. L'ensemble de l'exposé est confus et laisse le jury assez perplexe.

Le développement de la méthode d'Euler est limité à l'exemple. Les réponses aux questions du jury sont mal assurées.

15. Texte assez bien compris. Des soucis pour prouver des résultats mathématiques en relation avec le texte. Pas d'illustration intéressante. Les réponses aux questions sont décevantes, même sur des sujets simples et basiques comme la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables réelles.

Textes donnés en 2015

Texte A de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

I. Introduction, étude d'un système de production élémentaire

On considère un ensemble économique E constitué de n secteurs d'activité, chacun produisant un bien particulier. On note $a_{i,j}$ la quantité de bien numéro i , produit par le secteur S_i , qui est indispensable à S_j dans sa production d'une unité de bien numéro j , et on admet que le fonctionnement est linéaire.

Notons x_1, \dots, x_n les quantités produites un jour donné par les secteurs S_1, \dots, S_n . La production du secteur S_i s'écrit

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j + y_i \quad (0.1)$$

où $a_{i,j} x_j$ est la part envoyée au secteur S_j (pour alimenter la production de ce secteur) et y_i est la part destinée au marché, i.e. aux consommateurs externes à l'ensemble E .

Ce modèle est connu sous le nom de modèle de Leontiev, la matrice A , carrée d'ordre n , de terme général $a_{i,j} x_j$ est dite matrice des entrées-sorties (ou input-output). La quantité $a_{i,j} x_j$ est l'output de S_i servant à alimenter S_j , c'est aussi l'input de S_j fourni par S_i . On l'appelle aussi matrice technologique.

Avec des notations évidentes, l'équation (0.1) devient $X = AX + Y$ ou encore $(I - A)X = Y$.

Les nombres $a_{i,j}$ sont des réels positifs, par essence. Les nombres x_j sont aussi des réels positifs. Le fonctionnement productif n'a de sens économique que si, pour tout j , $y_j > 0$. On parle de modèle fermé de Leontieff lorsque les y_j sont tous nuls (pas de production externe).

Donnons un exemple fictif élémentaire

	à usage interne		externe	total
	énergie	construction	consommateurs	quantités produites
Énergie	30	45	15	90
Construction	25	25	50	100

Dans cet exemple la matrice technologique est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

II. Quelques résultats spectraux

Soit A une matrice carrée d'ordre n , dont tous les termes sont réels positifs.

On peut prouver les résultats suivants

1. Il existe un vecteur-colonne $X \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nul et de composantes toutes > 0 tel que $(I-A)X = \rho(A)X$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A .
2. Si le rayon spectral de A est strictement inférieur à 1 alors $I - A$ est inversible, la série $\sum_k A^k$ converge et sa somme est l'inverse de $I - A$.
3. Si le rayon spectral de A est strictement inférieur à 1, toute suite $(X_k)_k$ définie par un vecteur initial X_0 et la relation $X_{k+1} = AX_k + Y$ pour tout entier naturel k , est convergente de limite la solution X de (0.1).

Si A est la matrice technologique du système de production décrit dans l'introduction, l'existence pour $I - A$ d'une inverse à coefficients tous positifs permet de donner quelle que soit la demande Y des consommateurs une réponse X , ayant un sens économique, au problème de production (0.1).

La série géométrique du résultat 2 ci dessus possède une interprétation économique : écrivant la relation (0.1) sous la forme $X = (I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots)Y$ on observe que la solution X du problème de production est obtenue comme suit :

- afin de satisfaire la demande des consommateurs chaque secteur S_i envisage de produire d'abord une quantité y_i , on commence donc à produire un premier vecteur-colonne Y
- pour réaliser cette première production Y chaque secteur doit alimenter les autres secteurs et ceci nécessite une production AY
- pour réaliser cette deuxième production AY chaque secteur doit alimenter les autres secteurs et ceci nécessite une production A^2Y , etc...

III. Viabilité

Le fonctionnement du système de production décrit dans l'introduction est dit *viable* lorsque il existe un vecteur-colonne $X \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ de composantes toutes > 0 tel que $(I - A)X$ a toutes ses composantes strictement positives. À la place de viable on dit parfois *productif*.

On montre, pour toute matrice A , carrée d'ordre n , dont tous les termes sont réels positifs, que les propriétés suivantes sont équivalentes

1. le fonctionnement est viable
2. $\mathbb{R}_+^n \subset (I - A)(\mathbb{R}_+^n)$
3. $\det(I - A) > 0$ et $(I - A)^{-1}$ a tous ses coefficients positifs
4. les mineurs principaux de $I - A$ sont tous strictement positif
5. $\rho(A)$ le rayon spectral de A est strictement inférieur à 1

6. il existe un vecteur ligne L de composantes toutes > 0 tel que $L(I - A)$ a toutes ses composantes strictement positives.

La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ de l'exemple du paragraphe Introduction donne un fonctionnement viable.

IV. Un sujet de concours en relation avec le thème



Code sujet : 290

Concours d'admission de 2014

Conception : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 9 mai 2014, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , où a et b sont réels ou infinis.

On dit qu'une densité de probabilité f vérifie l'hypothèse $\text{CSP}(I)$ lorsque f est :

- continue sur I ;
- strictement positive sur I ;
- nulle en dehors de I .

On écrira alors simplement : f est $\text{CSP}(I)$.

On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires continues.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I , de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est $\text{CSP}(I)$.
- U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X .
- h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

1/6

Tournez la page S.V.P.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$P([U \leq h(X)]) = P([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t) dt.$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\forall x \in I, \Psi(x) = P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max_{t \in [x, y]} h(t)$ et $m(x, y) = \min_{t \in [x, y]} h(t)$.

(a) Soit x dans I . Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

(b) En déduire : $\lim_{y \rightarrow x} M(x, y) = h(x)$.

(c) Montrer de même que pour tout y dans I , $\lim_{x \rightarrow y} M(x, y) = h(y)$.

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) : $\lim_{y \rightarrow x} m(x, y) = h(x)$ et

$$\lim_{x \rightarrow y} m(x, y) = h(y).$$

2. Soit x et y des réels de I tels que $x < y$.

(a) Établir l'inclusion suivante entre événements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x))M(x, y)$$

(b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y)$$

(c) Montrer que Ψ est dérivable sur I , et exprimer sa dérivée en fonction de f et h .

3. (a) En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t) dt.$$

(b) Établir : pour tout x dans I , $\Psi(x) \leq F(x)$, puis montrer : $\lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \Psi(x) = \int_a^x f(t)h(t) dt.$$

(c) Établir : pour tout x dans I , $P([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = P([U \leq h(X)]) - \Psi(x)$.

En déduire : $\lim_{x \rightarrow b} \Psi(x) = P([U \leq h(X)])$, puis

$$P([U \leq h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t) dt.$$

4. Montrer que $P([U < h(X)]) = 1 - P([1 - U \leq 1 - h(X)])$, et en déduire

$$P([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t) dt.$$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1 , S_2 et S_3 . On suppose que :

- pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
 - pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
 - pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.
- On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1 , x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1 , S_2 et S_3 , strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

- (b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. (a) Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace vectoriel associé.
(b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $] -1, 1[$.

7. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.
(b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha + \beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $] -1, 1[$.
8. On suppose, dans cette question, seulement que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP($]0, 1[$).

En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - E(\beta)$.

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3 , on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i , et $y_i + z_i$ le prix de vente d'une unité de bien du secteur i . La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i .

On définit les deux matrices lignes : $Y = (y_1 \ y_2 \ y_3)$ et $Z = (z_1 \ z_2 \ z_3)$ ainsi que la matrice

$$\text{carrée } B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = YA + ZB$.

- (b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.

En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

V. Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner la preuve de quelques implications entre les propriétés listées de 1 à 6 dans le paragraphe Viabilité.
- Soit A une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{R}^+ telle que, pour toute colonne C_j de A , la somme des coefficients de C_j est strictement inférieure à 1. Montrer que le rayon spectral de A est strictement inférieur à 1.
- Soit M une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{C} . Montrer que si le rayon spectral $\rho(M)$ est strictement inférieur à 1, alors la suite géométrique $(M^k)_k$ converge vers 0. Est ce que la réciproque est vraie ?

Aspect enseignement CPGE

- Proposer des réponses argumentées à quelques questions de la partie 2 du sujet proposé.
- Discuter la qualité de la rédaction du sujet, notamment dans la partie 2. Hypothèses oubliées, erreurs éventuelles, questions supplémentaires intéressantes, possibilité d'affaiblir certaines hypothèses...

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Exposer des méthodes itératives pour trouver X solution de (0.1), comparer les. Proposer un ou plusieurs programmes informatiques que l'on testera sur des problèmes de production.
Exposer un algorithme permettant de calculer, de façon exacte ou approchée, le rayon spectral d'une matrice donnée. Tester un programme informatique écrit dans le langage de votre choix sur quelques exemples.
Pour les exemples on pourra choisir la matrice A au moyen d'un générateur aléatoire du logiciel, en faisant attention que les coefficients de cette matrices soient tous positifs.
- Interpréter certains résultats du paragraphe Viabilité du point de vue des économistes.
- Dans une situation économique donnée, les valeurs observées conduisant aux coefficients de la matrice A peuvent être entachées d'erreurs ou bien données de façon approchée. Quelles sont les conséquences de ces erreurs sur les propriétés du système de production, du point de vue des mathématiciens, du point de vue des économistes ?

Texte B de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

I. Introduction, le risque de faillite pour une société d'assurance

Une société d'assurance doit pouvoir faire face à des demandes variables et difficilement prévisibles de versements. Ces versements sont dus aux assurés pour régler des soins, des réparations, des frais de justice éventuels et des dédommagements aux tiers... en fonction du contrat d'assurance signé et en contrepartie des échéances payées. Le nombre de demandes et le montant des versements sont liés à des accidents, donc par nature aléatoires.

Le risque principal pour une société d'assurance est de ne pouvoir honorer tous les versements dus pour une période donnée. En général la durée des périodes considérées est d'un an. Aussi il est nécessaire de disposer de modèles théoriques permettant d'analyser le montant total des sinistres aléatoires sur une année et de préparer des stratégies de couverture : fixer le montant des échéances payées par les assurés, le niveau des contrats de réassurance auprès de sociétés spécialisées dans ce domaine...

II. Un premier modèle pour la charge sinistrale totale, le modèle individuel

On note n le nombre d'assurés, on considère Y_1, Y_2, \dots, Y_n une suite indépendante de variables aléatoires, Y_i représentant le montant dû par la société d'assurance en raison de sinistre(s) ayant affecté l'assuré numéro i . Pour simplifier le modèle on suppose les variables Y_i de même loi L (et on les suppose définies toutes sur un même espace probabilisé Ω, \mathcal{A}, P). La charge sinistrale totale est $S = \sum_{i=1}^n Y_i$

Précisons le modèle, i.e. les lois utilisées. On admet l'existence de variables aléatoires indépendantes B_1, X_1 telles que $Y_1 = B_1 Z_1$, B_1 suivant la loi de Bernoulli de paramètre q ($q \in]0, 1[$), Z_1 une loi discrète de support inclus dans \mathbb{N}^* ou à densité, de support inclus dans \mathbb{R}_+^*

Comme la variable S est la somme de n variables indépendantes Y_i , sa loi est le produit de convolution des lois des Y_i . Ces lois étant égales, la loi de S est la puissance n ème de convolution de la loi de Y_1 . Rappelons que le produit de convolution de deux lois discrètes (resp. à densité) s'obtient par une sommation du type $\sum_k u_k v_{j-k}$ (resp. par intégration

$\int f(x-t)g(t)dt$).

Dans notre cas la fonction de répartition de S est donnée par $\forall t < 0, P\{S < t\} = 0$ et $\forall t > 0, P\{S < t\} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} F_k(t)$ où

$$F_0(t) = 1 \text{ et } F_{k+1}(t) = \begin{cases} \int_0^t F_k(t-s)f(s)ds & \text{si } f \text{ est la densité de } Z_1 \\ \sum_{1 \leq i \leq j} F_k(j-i)P\{X_1 = i\} & \text{si } Z_1 \text{ à valeurs entières} \end{cases} \quad (0.2)$$

NB ces calculs de puissances de convolution peuvent être particulièrement ardues. Le seul cas simple à traiter est celui de lois présentant une stabilité par addition. On rappelle ci dessous quelques résultats bien connus de stabilité par addition :

- si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et de lois respectives Binomiale(m, p), Binomiale(n, p) alors la loi de $X + Y$ est Binomiale($m + n, p$)

- si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et de lois respectives Poisson(λ), Poisson(μ) alors la loi de $X + Y$ est Poisson($\lambda + \mu$)
- si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et de lois respectives gamma(λ), gamma(μ) alors la loi de $X + Y$ est gamma($\lambda + \mu$).

III. Un second modèle pour la charge sinistrale totale, le modèle collectif

Compte tenu de la difficulté à calculer la loi de $\sum_1^n Y_i$ pour des entiers n relativement grands, de l'ordre de 1000, 10 000 voire plus, il est souvent préféré au modèle individuel un modèle dit collectif qui procède comme suit : on note N la variable aléatoire égale au nombre de sinistres, on sait alors exprimer la charge sinistrale totale sous la forme

$$S = \sum_{1 \leq i \leq N} X_i$$

où X_i est le montant du sinistre numéro i . Les hypothèses habituelles pour ce nouveau modèle sont l'indépendance de N, X_1, X_2, \dots et l'équidistribution des X_i . La loi de S est alors dite *composée*.

La fonction de répartition de S s'écrit maintenant $F_S(t) = \sum_{n \geq 0} P\{N = n\} F_X^{n*}(t)$ avec des répartitions de convolution F_X^{n*} données comme en (0.2), en remplaçant Z_1 par X_1 .

On montre alors

$$E(S) = E(N)E(X), \quad V(S) = E(N)V(X) + V(N)E(X)^2 \quad (0.3)$$

i.e. la variance de S est combinaison linéaire de la variabilité des montants des sinistres autour du montant moyen et de la variabilité du nombre de sinistres autour du nombre moyen

IV. Extrait d'un sujet de concours CPGE sur le thème des lois composées



Code épreuve : 290

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Concepteur : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Vendredi 10 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.

On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} ;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^n U_k$, et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :

$$X = \sum_{k=1}^N U_k$$

et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0.

On dit que X suit une loi composée.

- Pour tout entier naturel j , on pose $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

1 / 5

Tournez la page S.V.P.

Partie III du sujet : On suppose que la variable aléatoire N est à valeurs dans \mathbb{N} , on pose $p_k = P\{N=k\}$ pour tout entier naturel k . On dit que la loi de N est dans la classe de Panjer quand : il existe deux réels a, b tels que $a < 1$, $0 < a + b$ et $p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$ si $k \in \mathbb{N}^*$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. Détermination des lois de Panjer.

(a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b .

(c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

i. Montrer qu'il existe un unique entier naturel r , tel que : $\forall k > r, p_k = 0$ et $\forall k \leq r, p_k \neq 0$.

On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

ii. Montrer : $b = -a(r + 1)$.

iii. Établir que pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket, p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.

En déduire que $p_0 = \frac{1}{(1-a)^{r+1}}$.

iv. En conclure que N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de a et b .

(d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

i. Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.

ii. En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b .

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $E(N) = \frac{a+b}{1-a}$ et $V(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$.

Partie IV - L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un événement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A .

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$.

13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $E_{(X_{n-1}=j)}(X_n)$? En déduire : $E_{(X_{n-1}=j)}(U_1) = \frac{j}{n}$.

(b) Établir : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_{n-1}=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) p_{n-1}$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i) P(X_{n-1} = j - i).$$

(d) En conclure : $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b_i}{j}\right) q_i r_{j-i}$ puis

$$r_j = \frac{1}{1-aq_0} \left(\sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b_i}{j}\right) q_i r_{j-i}\right) \quad (0.4)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X .

Conclusions :

[1] Les lois de la classe de Panjer sont

- binomiale ² $B(m, \alpha)$, i.e. $P\{N = k\} = \binom{m}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}$
- de Poisson ³ $Poiss(\lambda)$, i.e. $P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k! \exp(-\lambda)}$
- binomiale négative ⁴ $BN(r, \alpha)$, i.e. $P\{N = k\} = \binom{r-1+k}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}$

NB pour r entier strictement positif $BN(r, \alpha)$ est la loi du nombre d'échecs avant le rème succès, les tentatives répétées étant supposées indépendantes et la probabilité d'obtenir un succès égale, pour chaque tentative, au nombre α .

[2] si la loi de N est une des trois lois ci dessus, si la suite $(U_k)_k$ est une suite indépendante équadistribuée de variables aléatoires entières positives vérifiant $P\{U_k = i\} = q_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $S = \sum_{k=1}^N U_k$ est à valeurs entières et sa loi est donnée par $P\{S = j\} = r_j$, la suite $(r_j)_j$ satisfaisant la relation

$$r_j = \frac{1}{1-aq_0} \left(\sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b_i}{j}\right) q_i r_{j-i}\right)$$

V. Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner la preuve du résultat (0.2), page 2.
- Donner des résultats de stabilité par addition pour certaines lois à densité, justifier.
- Donner une preuve des résultats sur espérance et variance d'une loi composée, formule (0.3).

2. dans le cas binomial $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$, ce cas correspond au couple $a = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $b = \left(\frac{\alpha(m+1)}{\alpha-1}\right)$

3. dans le cas de Poisson $\lambda \in]0, +\infty[$, ce cas correspond au couple $a = 0$, $b = \lambda$

4. dans le cas binomial négatif $r \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in]0, 1[$, ce cas correspond au couple $a = 1 - \alpha$, $b = (1 - \alpha)(r - 1)$

Aspect enseignement CPGE

- Proposer des réponses argumentées à certaines questions des parties III ou IV du sujet proposé.

Les questions 10 et 13 sont particulièrement intéressantes.

- Proposer des questions supplémentaires où des exemples d'applications de la formule de récurrence (0.4) sont données.

-

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Déterminer les couples $(a; b)$ pouvant donner lieu à une loi de la classe de Panjer. Représenter graphiquement.
- Proposer un programme informatique permettant le calcul des r_j satisfaisant la relation (0.4) (ne pas oublier la valeur initiale donnée par la question 12 du sujet). On pourra supposer que l'utilisateur entre
- a, b réels donnant lieu à une loi de la classe de Panjer
- une suite finie q_0, q_1, \dots, q_n caractérisant une loi de probabilité portée par les entiers compris entre 0 et n et fournir en sortie de programme la suite r ainsi qu'une représentation graphique de cette suite (un histogramme de la loi de S).
- En utilisant le programme évoqué ci dessus ou d'autres moyens, proposer des exemples d'histogramme de la loi de variables composées S . Pour chaque exemple donner des indications qualitatives sur la loi de S et discuter sa pertinence à modéliser la charge sinistrale totale d'une société d'assurance. Placer en regard du graphique les indicateurs moyenne et variance, cf formule (0.3).
- Proposer des algorithmes pouvant fournir la loi de S dans le cadre du premier modèle (individuel). Programmer, présenter des exemples et des représentations graphiques associées.
- Envisager l'étude du modèle collectif dans le cas où la loi de X_i est à densité. Proposer des méthodes de calcul approché de la loi de S .

PROPOSER des ex de l'article SSRN p105 à 112 et les faire programmer retrouver discuter (loi de Pareto...)

Système proies-prédateurs de Volterra-Lotka

Introduction

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : des proies (lapins ou sardines) et des prédateurs (renards ou requins, respectivement!). On note $x(t)$ et $y(t)$ les proportions de proies et prédateurs au temps t . Afin de disposer d'outils mathématiques pour la modélisation de cette évolution, on ajoute des hypothèses de régularité sur les fonctions x et y . En l'absence de prédateurs, de compétition et d'abondance de nourriture, les proies ont un taux $a > 0$ de croissance :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a.$$

En l'absence de proies, les prédateurs ont tendance à disparaître et leur taux de croissance $-c < 0$ est

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c.$$

En présence des deux espèces en même temps, le taux de croissance des proies du nombre de prédateurs de la manière suivante :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by \quad \text{avec } b > 0$$

et celui des prédateurs dépend aussi du nombre de proies :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx \quad \text{avec } d > 0.$$

En résumé, on dispose du système différentiel autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \\ x(0) = x_0 > 0, \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ce système, appelé système de Volterra-Lotka, s'écrit aussi

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2)$$

avec $X(t) = (x(t), y(t))$, $f(x, y) = (ax - bxy, -cy + dxy)$ et $X_0 = (x_0, y_0)$. En l'absence de solutions à l'aide d'une formule analytique du système (1), on étudie ce système de façon qualitative pour obtenir des informations sur l'évolution des quantités x et y au cours du temps. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale de (2). Cette unique solution est définie sur un intervalle de type $[0, T[$ avec $T > 0$. Dans ce cas, on définit la trajectoire partant de X_0 suivante :

$$\tau(X_0) = \{X(t) \mid 0 \leq t < T\}$$

où X est la solution maximale de (2). Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que deux trajectoires distinctes sont disjointes. L'évolution au cours du temps suppose qu'on n'a pas de contrainte sur ce temps ; on doit avoir $T = +\infty$. On ne peut pas ajouter cette hypothèse aux hypothèses de la modélisation de l'évolution vu que la solution X est imposée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Heureusement, on dispose de conditions suffisantes via le théorème suivant :

Théorème 1

Si la solution maximale de (2) est bornée sur $[0, T[$, alors $T = +\infty$.

Ceci est dû au fait que si la solution maximale de (2) est bornée, alors l'adhérence $K = \overline{\tau(X_0)}$ de $\tau(X_0)$ est un compact. Il suffit d'exhiber une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers T et que $(X(t_n))_{n \geq 0}$ soit convergente vers un certain $X_1 \in K$. Lorsque T est finie, on peut étudier le système :

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)), \\ X(0) = X_1. \end{cases}$$

Notons que la trajectoire $\tau(X_0)$, partant de $X_0 = (\alpha, \beta)$, reste dans ce point lorsque $f(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Ce point est appelé un équilibre du système (2).

Propriétés du système de Volterra-Lotka

On conserve les notations du paragraphe précédent. Les quantités x et y doivent être positives et ne s'annulent jamais au cours du temps faute de quoi, on voit la disparition d'une des deux espèces contrairement aux règles de la nature qui imposent une sorte d'équilibre de l'écosystème. Les résultats théoriques assurent ces faits :

Théorème 2

1. Si $x_0 = 0$ (respectivement $y_0 = 0$), alors pour tout $t < T$, $x(t) = 0$ (respectivement $y(t) = 0$).
2. Si $x(t_0) = 0$ (respectivement $y(t_0) = 0$) pour un certain $t_0 < T$, alors pour tout $t \in [0, T[$, $x(t) = 0$ (respectivement $y(t) = 0$).
3. Si $x_0 > 0$ (respectivement $y_0 > 0$), alors pour tout $t > 0$, $x(t) > 0$ (respectivement $y(t) > 0$).

En d'autres termes, le Théorème 2 assure qu'une trajectoire partant X_0 dans la région $\mathcal{R} : x > 0, y > 0$ du plan reste dans cette région. Le résultat suivant donne une idée sur la trajectoire $\tau(X_0)$ partant de $X_0 \in \mathcal{R}$.

Théorème 3

La fonction H définie sur la région \mathcal{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{R}, H(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$$

est une intégrale première pour le système (2), c'est-à-dire que si X est solution de (2) avec $X_0 \in \mathcal{R}$, alors la fonction $t \mapsto H(X(t))$ est constante sur $[0, T[$.

Remarque 1

1. Une simple vérification permet conclure que $H(x, y) \geq H(\alpha, \beta)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$ avec égalité si et seulement si $(x, y) = (\alpha, \beta)$ l'équilibre du système (2) dans la région \mathcal{R} .
2. On peut affirmer l'existence de $A > 0$ tel que $dx - c \ln(x) \geq \frac{d}{2}x$ et $by - a \ln(y) \geq \frac{b}{2}y$ pour tous $x, y \geq A$.

Maintenant, on peut assurer les conditions suffisantes du Théorème 1 pour éliminer la contrainte de finitude du temps.

Théorème 4

Si $X_0 \in \mathcal{R}$, alors la solution maximale du système (2) est bornée.

Une dernière propriété qualitative est la périodicité des solutions du système (2).

Théorème 5

Si $X_0 \in \mathcal{R}$, alors la solution maximale du système (2) est périodique.

Remarque 2 (sur de la preuve du Théorème 5)

Dans le schéma ci-contre on a dessiné sur le champ des vitesses pour le système de Volterra-Lotka. Celui-ci divise la région \mathcal{R} en les quatre régions \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 et \mathbf{R}_4 dans lesquelles x et y sont monotones. Ces régions peuvent être décrites par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 & : x' \geq 0 \text{ et } y' \leq 0, \\ \mathbf{R}_2 & : x' \geq 0 \text{ et } y' \leq 0, \\ \mathbf{R}_3 & : x' \geq 0 \text{ et } y' \leq 0, \\ \mathbf{R}_4 & : x' \geq 0 \text{ et } y' \leq 0. \end{aligned}$$

comme précise le champ de vitesses ci-contre avec $x > 0$ et $y > 0$. L'idée de la preuve de périodicité des solutions consiste à suivre une trajectoire commençant à partir d'un point initial $X_0 = (x_0, y_0)$ au travers de ces régions et au cours du temps.

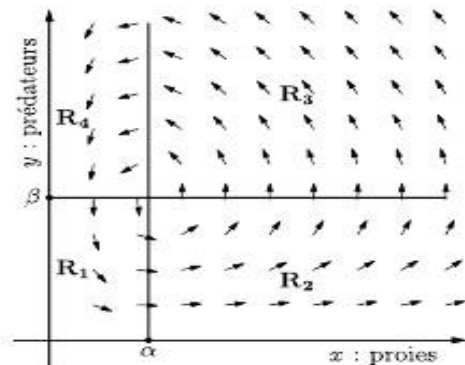


FIGURE 1 – Un champ de vitesses.

Sans perte de généralité, on suppose que le point initial $X_0 \in \mathbf{R}_1$. La monotonie et la bornitude des fonctions x et y assure l'existence d'un temps $t_1 > 0$ tel que $X(t) \in \mathbf{R}_2$ pour $t \geq t_1$ et voisin de t_1 . De façon similaire, il existe des temps t_2, t_3, t_4 et t_5 tels que :

Propriétés du système de Volterra-Lotka

On conserve les notations du paragraphe précédent. Les quantités x et y doivent être positives et ne s'annulent jamais au cours du temps faute de quoi, on voit la disparition d'une des deux espèces contrairement aux règles de la nature qui imposent une sorte d'équilibre de l'écosystème. Les résultats théoriques assurent ces faits :

Théorème 2

1. Si $x_0 = 0$ (respectivement $y_0 = 0$), alors pour tout $t < T$, $x(t) = 0$ (respectivement $y(t) = 0$).
2. Si $x(t_0) = 0$ (respectivement $y(t_0) = 0$) pour un certain $t_0 < T$, alors pour tout $t \in [0, T[$, $x(t) = 0$ (respectivement $y(t) = 0$).
3. Si $x_0 > 0$ (respectivement $y_0 > 0$), alors pour tout $t > 0$, $x(t) > 0$ (respectivement $y(t) > 0$).

En d'autres termes, le Théorème 2 assure qu'une trajectoire partant X_0 dans la région $\mathcal{R} : x > 0, y > 0$ du plan reste dans cette région. Le résultat suivant donne une idée sur la trajectoire $\tau(X_0)$ partant de $X_0 \in \mathcal{R}$.

Théorème 3

La fonction H définie sur la région \mathcal{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{R}, H(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$$

est une intégrale première pour le système (2), c'est-à-dire que si X est solution de (2) avec $X_0 \in \mathcal{R}$, alors la fonction $t \mapsto H(X(t))$ est constante sur $[0, T[$.

Remarque 1

1. Une simple vérification permet conclure que $H(x, y) \geq H(\alpha, \beta)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$ avec égalité si et seulement si $(x, y) = (\alpha, \beta)$ l'équilibre du système (2) dans la région \mathcal{R} .
2. On peut affirmer l'existence de $A > 0$ tel que $dx - c \ln(x) \geq \frac{d}{2}x$ et $by - a \ln(y) \geq \frac{b}{2}y$ pour tous $x, y \geq A$.

Maintenant, on peut assurer les conditions suffisantes du Théorème 1 pour éliminer la contrainte de finitude du temps.

Théorème 4

Si $X_0 \in \mathcal{R}$, alors la solution maximale du système (2) est bornée.

Une dernière propriété qualitative est la périodicité des solutions du système (2).

Théorème 5

Si $X_0 \in \mathcal{R}$, alors la solution maximale du système (2) est périodique.

Remarque 2 (sur de la preuve du Théorème 5)

Dans le schéma ci-contre on a dessiné sur le champ des vitesses pour le système de Volterra-Lotka. Celui-ci divise la région \mathcal{R} en les quatre régions $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ et \mathbf{R}_4 dans lesquelles x et y sont monotones. Ces régions peuvent être décrites par :

- \mathbf{R}_1 : $x' \geq 0$ et $y' \leq 0$,
- \mathbf{R}_2 : $x' \geq 0$ et $y' \leq 0$,
- \mathbf{R}_3 : $x' \geq 0$ et $y' \leq 0$,
- \mathbf{R}_4 : $x' \geq 0$ et $y' \leq 0$.

comme précise le champ de vitesses ci-contre avec $x > 0$ et $y > 0$. L'idée de la preuve de périodicité des solutions consiste à suivre une trajectoire commençant à partir d'un point initial $X_0 = (x_0, y_0)$ au travers de ces régions et au cours du temps.

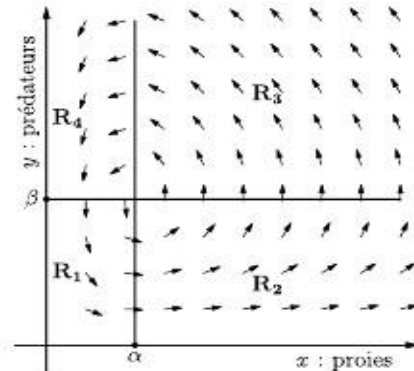


FIGURE 1 – Un champ de vitesses.

Sans perte de généralité, on suppose que le point initial $X_0 \in \mathbf{R}_1$. La monotonie et la bornitude des fonctions x et y assure l'existence d'un temps $t_1 > 0$ tel que $X(t) \in \mathbf{R}_2$ pour $t \geq t_1$ et voisin de t_1 . De façon similaire, il existe des temps t_2, t_3, t_4 et t_5 tels que :

*

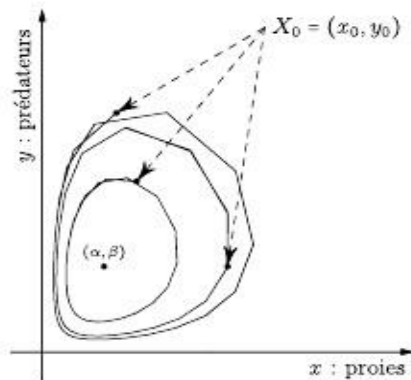


FIGURE 3 – Trajectoires à partir de différents points initiaux X_0 avec $n = 25$.

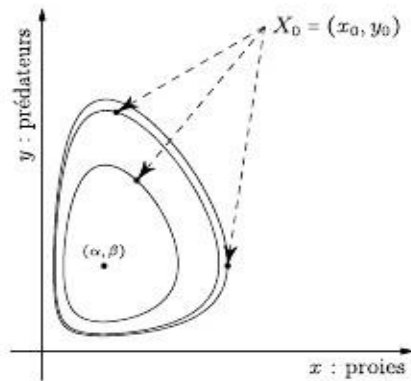


FIGURE 4 – Trajectoires à partir de différents points initiaux X_0 avec $n = 250$.

Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur.*
- On pourra illustrer l'une des méthodes, proposées dans ce document ou autres, d'approximation des solutions du système de Volterra-Lotka.
- On pourra donner l'allure approchée d'une trajectoire partant d'un point de la région \mathcal{R} non loin de l'équilibre du système de Volterra-Lotka en utilisant **Maple** ou **Python**.
- On pourra démontrer l'un des théorèmes 1, ..., 5.
- On pourra expliquer et analyser la Remarque 2.

Texte D de l'épreuve de modélisation

Problème de Sudoku

1 Introduction

Le principe du sudoku d'ordre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est de remplir une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_m(\mathbb{Z})$, avec $m = n^2$, par des chiffres de $\llbracket 1, m \rrbracket$ tels que :

- sur chaque ligne, les m chiffres apparaissent (ou encore, les éléments de la ligne sont tous distincts) ;
- même contrainte sur chaque colonne ;
- chacune des m sous-matrices $A_{k,\ell} = (a_{n(k-1)+i, n(\ell-1)+j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, à tous ses coefficients distincts (les m chiffres apparaissent sur chacune de ces sous-matrices) ;
- de plus, les matrices que l'on regarde peuvent avoir déjà certains chiffres fixés.

Exemple 1

Considérons le problème de Sudoku suivant :

		8	4				3	
				1			8	4
					7			1
7		1	2				4	8
8			6		1			
	2	6			8	5		7
2			3					
9		3		2				
4	8				5	2		

FIGURE 1 – Un Sudoku d'ordre 3.

On se pose la question : ce problème admet-il une solution ? Si oui, la déterminer ou déterminer toutes les solutions possibles. Le principe de résolution qui sera proposé sera de déterminer une base de Gröbner de l'idéal des contraintes sur les coefficients, et ainsi, si cet idéal définit bien des solutions, en réduisant $a_{i,j}$ modulo l'idéal de ces relations, on obtiendra les valeurs possibles pour ce coefficient.

2 Les contraintes.

2.1 Contrainte 1.

Déterminer les équations qui correspondent aux contraintes : " $a_{i,j}$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1, m \rrbracket$." On peut regarder $a_{i,j}$ comme une racine d'un polynôme $P(X)$ unitaire bien choisi à coefficients dans un corps \mathbb{K} encore bien choisi. On propose par exemple

$$P(X) = \prod_{\ell=1}^m (X - \ell) \quad \text{ou} \quad P(X) = X^m - 1.$$

Pour le deuxième choix de $P(X)$, noter qu'on peut identifier $\llbracket 1, m \rrbracket$ à l'ensemble des racines m -ème de l'unité U_m à travers la bijection : $\ell \rightarrow \exp\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$.

2.2 Contrainte 2.

Déterminer les équations qui correspondent aux contraintes : "tous les éléments d'une même ligne, d'une même colonne ou d'une des m sous-matrices extraites $A_{k,\ell}$ sont distincts." Pour cela, on introduit le polynôme $Q(X, Y)$ de $\mathbb{K}[X, Y]$ à deux variables X et Y défini par : $Q(X, Y) = \frac{P(X) - P(Y)}{X - Y}$.

2.3 Contrainte 3.

Déterminer les équations qui correspondent aux contraintes : "les matrices que l'on regarde peuvent avoir déjà certains chiffres fixés." Si la case (i, j) est déjà remplie par un chiffre fixé $c_{i,j}$, on lui associe le polynôme :

$$P_{i,j}(X) = X - c_{i,j}.$$

3 Une introduction à la notion de base de Gröbner.

La base de Gröbner constitue en autres un moyen de résolution des systèmes polynomiaux. La notion de base de Gröbner d'un idéal I de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, noté tout simplement $\mathbb{K}[Z]$, dépend d'un ordre dit monomial sur l'ensemble M des monômes de $\mathbb{K}[Z]$. On rappelle qu'un monôme de $\mathbb{K}[Z]$ est un polynôme particulier de la forme $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ simplifié en Z^α , avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

3.1 Ordre monomial

Définition 1

Un ordre total \leq sur l'ensemble M des monômes de $\mathbb{K}[Z]$ est dit monomial si :

- $1 \leq u$ pour tout $u \in M$,
- pour tous $u, v, w \in M$, si $u \leq v$, alors $uw \leq vw$.

Exemple 2

1. L'ordre lexicographique noté \leq_{lex} et défini, pour tous $u = Z^\alpha$ et $v = Z^\beta$, par :

$$u \leq_{\text{lex}} v \iff \begin{cases} u = v \\ \text{ou} \\ \alpha_i < \beta_i \text{ avec } i = \min \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \alpha_j \neq \beta_j\}. \end{cases}$$

2. L'ordre lexicographique gradué noté \leq_{grlex} et défini, pour tous $u = Z^\alpha$ et $v = Z^\beta$, par :

$$u \leq_{\text{grlex}} v \iff \begin{cases} |u| = \sum_{k=1}^n \alpha_k < |v| = \sum_{k=1}^n \beta_k \\ \text{ou} \\ |u| = |v| \text{ et } u \leq_{\text{lex}} v. \end{cases}$$

Avec un ordre monomial \leq , un polynôme P de $\mathbb{K}[Z] \setminus \{0\}$ s'écrit $P = a_0 u_0 + \dots + a_k u_k$ avec $a_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et u_i un monôme de sorte que $u_0 \leq \dots \leq u_k$. En d'autres termes, la famille M engendre l'espace vectoriel $\mathbb{K}[Z]$. Le coefficient a_k s'appelle le coefficient dominant de P et u_k s'appelle le monôme dominant de P . On les note respectivement $\text{lc}(P)$ et $\text{lm}(P)$. On dit que P est unitaire si $\text{lc}(P) = 1$.

3.2 Réduction et base de Gröbner

On suppose que \leq est un ordre monomial sur M .

Définition 2

Soient P et $Q = b_0 v_0 + \dots + b_\ell v_\ell$ deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[Z]$ avec $b_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. On dit que Q est irréductible modulo P si aucun des monômes v_i ($1 \leq i \leq \ell$) n'est multiple de $\text{lm}(P)$. Dans le cas contraire, Q est dit réductible modulo P .

Remarque 1

On reprend les polynômes cités dans la définition précédente et on suppose que Q est dit réductible modulo P . On sélectionne $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ tel que $v_i = w \cdot \text{lm}(P)$ puis on pose $R = Q - \frac{b_i}{\text{lc}(P)} w P$. On constate que R ne contient plus le monôme v_i . On dira alors que R a été obtenu à partir de Q par réduction modulo P et l'on notera $Q \xrightarrow{P} R$.

De manière plus générale, on a :

Définition 3

Si $A = \{P_1, \dots, P_s\}$ est une famille finie de polynômes non nuls, on dira que Q est réductible modulo A s'il est réductible modulo un certain P_j et on écrira $Q \xrightarrow{A} R$ s'il existe P_j tel que $Q \xrightarrow{P_j} R$. On notera $\xrightarrow{A^*}$ la fermeture transitive de la relation \xrightarrow{A} , c'est-à-dire que

$$Q \xrightarrow{A^*} R \iff Q = R \text{ ou } \exists Q_1, \dots, Q_t \in \mathbb{K}[Z], Q \xrightarrow{A} Q_1 \xrightarrow{A} Q_2 \xrightarrow{A} \dots \xrightarrow{A} Q_t \xrightarrow{A} R.$$

Théorème 1

Soit $\zeta = (\zeta_{i,j}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Alors, ζ est un zéro de I si, et seulement si, $Q(\zeta) = 0$ pour tout $Q \in S$.

Théorème 2

Soit $\zeta = (\zeta_{i,j}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Alors, ζ est un zéro de I si, et seulement si, ζ est une solution du problème de Sudoku.

Théorème 3

Le problème de Sudoku n'admet pas de solution si, et seulement si, une base de Gröbner, selon ordre monomial donné, de I contient 1.

Théorème 4

Soit $\zeta = (\zeta_{i,j}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Alors, ζ est l'unique solution du problème de Sudoku si, et seulement si, la famille $G = \{X_{i,j} - \zeta_{i,j} \mid (i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2\}$ est une base de Gröbner, selon n'importe quel ordre monomial, de I .

Exemple 4

Considérons le problème de Sudoku de la Figure 1. Après avoir regroupé les polynômes des contraintes et les indéterminées correspondantes, la base de Gröbner obtenue par Maple est la suivante :

$$\begin{aligned} & [x_{1,1} - 1, x_{1,2} - 7, x_{1,3} - 8, x_{1,4} - 4, x_{1,5} - 6, x_{1,6} - 2, x_{1,7} - 9, x_{1,8} - 3, x_{1,9} - 5, \\ & x_{2,1} - 6, x_{2,2} - 3, x_{2,3} - 2, x_{2,4} - 5, x_{2,5} - 1, x_{2,6} - 9, x_{2,7} - 8, x_{2,8} - 7, x_{2,9} - 4, \\ & x_{3,1} - 5, x_{3,2} - 4, x_{3,3} - 9, x_{3,4} - 8, x_{3,5} - 3, x_{3,6} - 7, x_{3,7} - 6, x_{3,8} - 2, x_{3,9} - 1, \\ & x_{4,1} - 7, x_{4,2} - 9, x_{4,3} - 1, x_{4,4} - 2, x_{4,5} - 5, x_{4,6} - 3, x_{4,7} - 4, x_{4,8} - 8, x_{4,9} - 6, \\ & x_{5,1} - 8, x_{5,2} - 5, x_{5,3} - 4, x_{5,4} - 6, x_{5,5} - 7, x_{5,6} - 1, x_{5,7} - 3, x_{5,8} - 9, x_{5,9} - 2, \\ & x_{6,1} - 3, x_{6,2} - 2, x_{6,3} - 6, x_{6,4} - 9, x_{6,5} - 4, x_{6,6} - 8, x_{6,7} - 5, x_{6,8} - 1, x_{6,9} - 7, \\ & x_{7,1} - 2, x_{7,2} - 1, x_{7,3} - 5, x_{7,4} - 3, x_{7,5} - 8, x_{7,6} - 6, x_{7,7} - 7, x_{7,8} - 4, x_{7,9} - 9, \\ & x_{8,1} - 9, x_{8,2} - 6, x_{8,3} - 3, x_{8,4} - 7, x_{8,5} - 2, x_{8,6} - 4, x_{8,7} - 1, x_{8,8} - 5, x_{8,9} - 8, \\ & x_{9,1} - 4, x_{9,2} - 8, x_{9,3} - 7, x_{9,4} - 1, x_{9,5} - 9, x_{9,6} - 5, x_{9,7} - 2, x_{9,8} - 6, x_{9,9} - 3]. \end{aligned}$$

Ce problème admet donc une unique solution. Il faut noter que le regroupement des polynômes des contraintes exige une procédure éviter de faire ce travail à la main ! Pour les polynômes de la forme $X_{i,j} - \zeta_{i,j}$ correspondants aux cases remplies, on n'a pas le choix ; il faut les entrer à la main.

Suggestions pour le développement

- Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur.
- On pourra traiter le problème de Sudoku de la figure 2 ci-dessous et déterminer, s'il y en a, les solutions de ce problème.

		2	
	3		1
1			

FIGURE 2 – Un Sudoku d'ordre 2.

- On pourra démontrer le Théorème 4
- On pourra écrire une procédure qui permet de regrouper les polynômes des contraintes

$$\begin{cases} P(X_{i,j}) & \text{pour } (i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \\ Q(X_{i,j}, X_{k,\ell}) & \text{si les cases } (i,j) \text{ et } (k,\ell) \text{ se trouvent dans une même ligne, même} \\ & \text{colonne ou dans une même sous-matrice extraite} \end{cases}$$

- et l'illustrer pour le cas du problème de Sudoku de la Figure 1
- On pourra, pour un problème de Sudoku, dénombrer les polynômes des contraintes pour ce problème.

Texte E de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

I. Introduction, stratégie d'investissement optimale et information

Un investisseur cherche en général à maximiser le taux de croissance de son capital. Un parieur (jeux de casino, courses hippiques ou autres compétitions sportives) poursuit le même objectif. Dans la plupart des cas des informations sont disponibles et permettent de réfléchir sur la possibilité de stratégies optimales. Les informations évoquées ici ne sont pas des informations secrètes ou asymétriques mais au contraire des informations partagées par tous les investisseurs/ parieurs. Par exemple les compte-rendus de performances des entreprises proposées par des journaux économiques, les cotations proposés par la Banque Centrale, qui traduisent une appréciation globale sur la capacité de l'entreprise à honorer ses engagements financiers à moyen terme, les cours de Bourse. En ce qui concerne les paris sportifs ces informations sont les cotes des différents protagonistes, diffusées dans les media et utilisées par les bookmakers ⁵. Rappelons que la cote représente le multiplicateur de mise qui fournit le gain en cas de victoire, de réussite. Pour aborder la notion de stratégie optimale donnons l'exemple de paris sur un jeu de Pile ou Face répété indéfiniment, les répétitions étant indépendantes. Le capital initial est noté c_0 , la probabilité de Pile est $p \in]0, 1[$ et la cote nette de Pile est notée b . Cela signifie que le parieur perd sa mise dans le cas d'un Face et reçoit b fois sa mise dans le cas d'un Pile. La cote brute est $c = b + 1$. On suppose $p > 1/b$, ce qui signifie que Pile est sous cotée, et que, en conséquence, le parieur mise toujours sur Pile. Le capital C_k du parieur à l'issue du lancer numéro k vérifie

$$C_k = C_{k-1} + R_k M_k$$

$$\text{où } R_k = \begin{cases} b & \text{si le } k\text{ème lancer donne Pile} \\ -1 & \text{si le } k\text{ème lancer donne Face} \end{cases}$$

et M_k est le montant misé pour ce k ème lancer. Noter la contrainte fondamentale $0 \ll M_k \ll C_{k-1}$: le jeu s'arrête pour le parieur si le capital C devient 0, on parle alors de ruine du joueur.

5. un bookmaker est une personne physique ou morale permettant au public de parier de l'argent sur des résultats incertains

On montre facilement que parier tout le capital disponible à chaque lancer conduit à la ruine en temps fini (en fait dès le premier Face), cela malgré une espérance de gain strictement positive à chaque lancer.

D'un autre coté, si le parieur décide de miser de très faibles montants à chaque lancer, le capital restera voisin du capital initial. Il semble donc pertinent de chercher l'existence d'un réel φ entre 0 et 1 qui optimise le gain moyen à long terme, pour un parieur qui mise X_{k-1} au lancer k , pour tout k .

Considérons le cas d'un parieur qui adopte cette dernière stratégie. On obtient facilement

$$C_n = c_0(1 + b\varphi)^{X_n}(1 - \varphi)^{n - X_n}$$

où X_n est le nombre de Piles obtenus en n lancers, variable de loi Binomiale(n, p). Le taux de croissance du capital en n étapes est défini par l'équation d'inconnue t :

$$(1 + t)^n = \frac{c_n}{c_0} = (1 + b\varphi)^{Xn}(1 - \varphi)^{n - Xn}$$

on s'intéresse à son comportement lorsque le nombre d'étapes augment indéfiniment, i.e.

$$\tau = \exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(1 + b\varphi)^{Xn}(1 - \varphi)^{n - Xn}\right) - 1$$

Appliquant la loi des grands nombres on obtient $\tau = \exp(p \ln(1 + b\varphi) + q \ln(1 - \varphi)) - 1$, avec $q = 1 - p$. L'étude de la fonction $\varphi \in]0, 1[\rightarrow p \ln(1 + b\varphi) + q \ln(1 - \varphi)$ fournit un maximum pour $\varphi = p - q/b$.

On dispose ainsi d'une stratégie optimale, le choix $\varphi = (bp - q)/b$.

Le comportement asymptotique de la suite (C_n) est en fait réglé par $\tau(\varphi)$. On peut montrer

- si $\tau(\varphi) > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = +\infty$ avec probabilité 1
- si $\tau(\varphi) < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 0$ avec probabilité 1
- si $\tau(\varphi) = 0$, alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} C_n = +1$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} C_n = 0$ avec probabilité 1.

NB1 Le choix $\varphi = (bp - q)/b$ minimise l'espérance du temps d'attente de la situation $C_n > \mu$, pour tout μ positif fixé d'avance.

NB2 Dans le cas d'un p susceptible de changer d'un lancer à l'autre, noté p_k pour le k ème lancer, la stratégie optimale est obtenue avec un φ lui aussi variable, donné par $\varphi_k = (bp_k - qk)/b$.

II- Une stratégie optimale dans le cas de tournois répétés

On considère le cas d'un tournoi opposant N concurrents, dont un seul sera déclaré vainqueur à l'issue de l'épreuve. On note p_k la probabilité de victoire pour le concurrent numéro k et c_k sa cote brute (i.e. en misant m UM sur le concurrent numéro k on obtient un gain net de $(c_k - 1)m$ s'il est vainqueur et perte de la mise m s'il n'est pas déclaré vainqueur). On considère une suite infinie de répétitions indépendantes du tournoi.

Le parieur choisit de miser tout son capital C à chaque tournoi sur plusieurs concurrents à la fois. Plus précisément il choisit un vecteur $(f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{R}_+^N$ de somme $\sum_k f_k = 1$ et mise, pour tout k , $f_k C$ sur le concurrent numéro k . Les valeurs f_k sont par convention des constantes, elles sont à choisir avant le premier tournoi et ne seront pas modifiées par la suite. Pour un capital initial égal à c_0 il obtient après n tournois

$$C_n = c_0 \prod_1^N (f_k c_k)^{N_k}$$

où N_k est le nombre de victoires du concurrent numéro k . Le taux moyen de croissance du capital pour n tournois est

$$t_n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{C_n}{c_0}\right)\right) - 1$$

et le taux asymptotique, sous réserve de convergence, $\tau = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$.

On peut montrer qu'il existe un unique vecteur $(f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{R}_+^N$ qui optimise τ , le vecteur défini par $f_k = p_k$ pour tout k , donnant pour taux optimal $\tau = \exp\left(\sum_1^N (\ln(c_k p_k))\right)$.

III- Inégalités en théorie de l'information, entropie

L'entropie au sens de la théorie de l'information est introduite par Shannon en 1948. Il s'agit de formaliser l'information perdue lors de la transmission de signaux (les lignes téléphoniques analogiques à l'époque). Le calcul de l'entropie d'une source de message, vue comme un

suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, donne une mesure de la difficulté à trouver l'élément suivant une suite finie observée. Il donne aussi une mesure du codage minimal qui permet de transmettre les messages sans perte.

Plus mathématiquement si X est une variable aléatoire prenant un nombre finie de valeurs x_1, \dots, x_n , si $p_k = P\{X = x_k\}$ on définit l'entropie de la loi de X (plus précisément de la suite finie des p_k , car en fait les x_k n'interviennent pas) par $Entr(X) = -\sum_k p_k \ln p_k$ (avec la convention usuelle $x \ln x = 0$ si $x = 0$). Le logarithme népérien peut être remplacé par celui de base 2, ou de base 10 ... c'est juste un changement d'unité. L'unité en \log_2 est appelée *bit*, celle en \ln est appelée *nat*. Un nat vaut environ 1.44 bits.

L'extension de l'entropie aux lois de variables discrètes générales ne pose pas de problème, mais l'entropie n'est définie que sous réserve de convergence d'une somme (de termes positifs). L'extension à la loi d'une variable aléatoire réelle X admettant une densité f_X relativement à la mesure de Lebesgue est

$Entr(X) = -\int f_X(x) \ln(f_X(x)) dx$ sous réserve d'existence de l'intégrale.

Les premières propriétés de l'entropie sont dues à Shannon, et confortent l'idée d'une mesure de la richesse d'information contenue dans un message. On montre que $S_n : (p_1, \dots, p_n) \rightarrow -\sum_k p_k \ln p_k$ est la seule famille qui vérifie

- S_n est symétrique en ses arguments, à valeurs positives, continue
- $S_n(1/n, 1/n, \dots, 1/n) = \ln(n)$
- $S_n(p_1, \dots, p_n) = S_{n-1}(p_1 + p_2, \dots, p_n) + (p_1 + p_2) S_2(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2})$

On montre aussi (inégalité de Gibbs) que pour toute variable Y telle que $Y(\Omega) \subset X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, avec $p_k = P\{X = x_k\}$, $q_k = P\{Y = x_k\}$:

$$Entr(X) \leq -\sum_1^N p_k \ln q_k$$

La notion d'entropie intervient dans plusieurs domaines du calcul des Probabilités et Statistiques. Elle est liée par exemple au taux de rendement asymptotique considéré dans les paragraphes précédents.

Extrait d'un sujet de concours CPGE en relation avec le thème

- a) Établir pour tout couple (x, y) de \mathbb{R}^2 , l'inégalité : $\ell(x) - \ell(y) \leq \ell'(y)(x - y)$.
- b) Montrer pour tout réel y , l'inégalité : $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x) dx \leq \ell(y) + \ell'(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x) dx - y \right)$.
- c) En déduire l'inégalité : $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x) dx \leq \ell \left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x) dx \right)$.
5. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, telles que les séries $\sum_{n \geq 1} r(x_n) p_n$ et $\sum_{n \geq 1} \ell(r(x_n)) p_n$ soient convergentes.
- Établir l'inégalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(r(x_n)) p_n \leq \ell \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r(x_n) p_n \right)$.

Partie II. Entropie dans le cas continu

On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions f définies et continues sur \mathbb{R} , à valeurs strictement positives, vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x)) dx$ soit convergente.

Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité un élément f de \mathcal{F} , on définit l'entropie $H(X)$ de X par :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x)) dx.$$

6. On note Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et φ sa densité continue.
- a) Justifier l'existence de l'entropie $H(Z)$ de Z et la calculer.
- b) Soit $(\alpha, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire qui admet pour densité un élément f de \mathcal{F} . Montrer que la variable aléatoire $Y = \alpha X + b$ admet une densité appartenant à \mathcal{F} et que $H(Y) = H(X) + \ln \alpha$.
- c) En déduire l'entropie d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$.
7. Dans cette question, on considère les couples (f, g) de \mathcal{F}^2 pour lesquels l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) dx$ est convergente. On pose alors : $D(f, g) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) dx$.
- a) Montrer que $D(f, g) \geq 0$.
- b) On suppose que $D(f, g) = 0$. Établir l'égalité : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) + 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) f(x) dx = 0$.
En déduire que $f = g$.

Partie III. Entropie dans le cas discret

8. Dans cette question, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[1, N]$. On pose pour tout k de $[1, N]$: $p_k = P(|X = k|)$.
- L'entropie $H(X)$ de X est définie par : $H(X) = - \sum_{k=1}^N p_k \ln(p_k)$.
- S'il existe un entier k de $[1, N]$ tel que $p_k = 0$, on pose par convention : $p_k \ln(p_k) = 0$.
- On note h_N la fonction de $(]0, 1])^N$ dans \mathbb{R} définie par : $h_N(x) = h_N(x_1, \dots, x_N) = - \sum_{k=1}^N x_k \ln(x_k)$.
- a) Calculer en tout point x de $(]0, 1])^N$, le gradient $\nabla h_N(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 h_N(x)$ de h_N .
- b) Montrer que pour l'optimisation de h_N sous la contrainte $\sum_{k=1}^N x_k = 1$, il existe un unique point critique x^* que l'on précisera.

- c) En utilisant la question 5 on l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer que h_N admet en x^* un maximum global sous la contrainte $\sum_{k=1}^N x_k = 1$.
- d) Parmi les variables aléatoires à valeurs dans $[1, N]$, quelle est la loi de celles qui ont la plus grande entropie ?

On note \mathcal{S} l'ensemble des suites réelles strictement positives $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* vérifiant pour tout n de \mathbb{N}^* , $P(\{X = n\}) = p_n$ avec $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}$.

On appelle entropie de X , le réel $H(X)$ défini sous réserve de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} p_n |\ln(p_n)|$, par :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n |\ln(p_n)|$$

9. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de \mathcal{S} telle que la série $\sum_{n \geq 1} n p_n$ est convergente.

- a) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $\sqrt{p_n} |\ln(p_n)| \leq 1$.
- b) Établir pour tout $n \geq n_0$ tel que $p_n \leq \frac{1}{n^3}$, l'inégalité : $p_n |\ln(p_n)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.
- c) En déduire que pour tout $n \geq n_0$, on a : $p_n |\ln(p_n)| \leq \max \left\{ \frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln n \right\}$.
- d) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} p_n |\ln(p_n)|$ est convergente.

Que peut-on en conclure sur l'entropie d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* possédant une espérance ?

10. Soit θ un réel de $]0, 1[$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de \mathcal{S} définie par : pour tout n de \mathbb{N}^* , $p_n = \theta(1 - \theta)^{n-1}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* qui vérifie pour tout n de \mathbb{N}^* , $P(\{X = n\}) = p_n$.

- a) Reconnaître la loi de X ; préciser son espérance, puis calculer son entropie.
- b) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `function I(theta : real) : integer` ; permettant de simuler X .
- c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* ayant une espérance égale à celle de X . Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $q_n = P(\{Y = n\})$. On suppose que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}$ et que la série $\sum_{n \geq 1} q_n \ln \left(\frac{p_n}{q_n} \right)$ est convergente.

Établir l'égalité : $H(Y) - H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \ln \left(\frac{p_n}{q_n} \right)$.

- d) Déterminer le signe de $H(Y) - H(X)$. Conclusion.

Partie IV. Entropie et taux de rendement asymptotique

11. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X .

- a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , l'application Z_n définie sur Ω par $Z_n : \omega \mapsto \exp(X_n(\omega))$ est une variable aléatoire. De même, on note Z la variable aléatoire $Z : \omega \mapsto \exp(X(\omega))$.

Soit ε et α deux réels strictement positifs.

- b) Justifier l'existence d'un réel s tel que $P(\{|X| \geq s\}) < \alpha$.
- c) Soit K_1, K_2 et K_3 trois éléments de \mathcal{A} . Montrer que $P(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \leq P(K_1) + P(K_2) + P(K_3)$; en déduire l'inégalité : $P(\{|Z_n - Z| \geq \varepsilon\}) \leq P(\{|X| \geq s\}) + P(\{|X_n - X| \geq 1\}) + P(\{|X_n - X| \geq \varepsilon \exp(-1 - s)\})$.
- d) Conclure.

On considère une succession de courses hippiques entre N chevaux participants ($N \geq 2$) numérotés $1, 2, \dots, N$. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on note G_n la variable aléatoire égale au numéro du cheval gagnant de la n -ième course.

On suppose que les variables aléatoires $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, sont définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes et de même loi. On suppose qu'il n'y a qu'un seul gagnant par course. On pose pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$ et pour tout n de \mathbb{N}^* : $p_k = P(\{G_n = k\})$, avec $0 < p_k < 1$.

Pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, on note c_k ($c_k > 1$) la cote du cheval k ; ainsi, un parieur qui a misé un montant m_k sur le cheval k perdra sa mise quelle que soit l'issue de la course, mais recevra la somme $m_k c_k$ si le cheval k est gagnant. On suppose que les cotes c_1, c_2, \dots, c_N sont fixes au cours du temps.

À l'occasion de la première course, un parieur dispose d'une somme monétaire $r_0 > 0$ qu'il souhaite répartir en totalité entre les N chevaux dans les proportions respectives f_1, f_2, \dots, f_N , où pour tout k de $\llbracket 1, N \rrbracket$, $0 < f_k < 1$. À l'issue de cette première course, le parieur dispose d'une somme monétaire $R_1 = r_0 M_1$ avec $M_1 > 0$.

À l'occasion de la deuxième course, ce parieur réinvestit en totalité la somme R_1 entre les N chevaux dans les mêmes proportions f_1, f_2, \dots, f_N . À l'issue de cette deuxième course, le parieur dispose d'une somme monétaire $R_2 = R_1 M_2$ avec $M_2 > 0$, et ainsi de suite...

La richesse monétaire R_n acquise au terme de n courses est donc : $R_n = r_0 \prod_{i=1}^n M_i$.

On définit pour tout n de \mathbb{N}^* , le taux de rendement moyen des paris par : $T_n = \left(\frac{R_n}{r_0}\right)^{1/n} - 1$.

12. a) Justifier que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs strictement positives et de même loi.

b) On suppose que la variable aléatoire $\ln(M_1)$ admet une espérance $E(\ln(M_1))$ et une variance $V(\ln(M_1))$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable certaine τ que l'on exprimera en fonction de $E(\ln(M_1))$. Le réel τ est le taux de rendement asymptotique des paris.

13. La stratégie du parieur consiste à choisir les proportions f_1, f_2, \dots, f_N qui maximiseraient τ .

On rappelle que les proportions f_1, f_2, \dots, f_N sont constantes au cours du temps.

a) Montrer que : $\tau = \exp\left(\sum_{k=1}^N p_k \ln(f_k c_k)\right) - 1$.

b) En déduire la stratégie optimale du parieur et la valeur optimale de τ associée à ses paris.

c) On suppose dans cette question que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{c_k} = 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^N p_k \ln(p_k c_k) \geq 0$.

Dans quel cas le parieur ne dispose-t-il d'aucune stratégie lui permettant de s'assurer un taux de rendement asymptotique optimal strictement positif ?

III. Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner la preuve de certains résultats du paragraphe I énoncés page 2.
- Donner la preuve du dernier résultat du paragraphe II, optimisation de .
- Donner la preuve de certaines propriétés qui caractérisent S_n , paragraphe III.

Aspect enseignement CPGE

- Dans les questions 4 et 5 du sujet (l'extrait commence à la question 4) on suppose l concave sur \mathbb{R} . Sous quels noms sont connues les inégalités prouvées à la fin de chacune de ces questions. Quelles hypothèses peut on poser sur les fonctions r et f ?
- Calculer l'entropie de la loi géométrique de paramètre $\theta \in]0, 1[$, cf Partie III question 10. Montrer, que cette entropie est maximale parmi les entropies des lois de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^*
- Donner une solution rédigée de la fin du problème, questions 11 et 12.

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Simuler informatiquement la situation de la Partie I (suite indépendante de variables ayant même loi, à deux valeurs. Simuler l'évolution du capital du parieur pour n grand et illustrer certains des résultats du texte.
- Simuler la situation de la partie II, tournois répétés. Illustrer les résultats donnés dans la partie IV du sujet, Entropie et taux de rendement asymptotique.
- Donner des programmes permettant des calculs approchés ou exacts d'entropie pour diverses lois de probabilité. Illustrer la propriété d'entropie maximale sous contraintes de certaines lois classiques.

Texte F de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

I. Introduction, le problème du trafic routier, des modèles simples

On s'intéresse à l'évolution à la fois dans l'espace et dans le temps du trafic routier sur une route à une seule voie, c'est donc un problème à deux dimensions, une de temps et une

d'espace. La modélisation considérée ici est simpliste, elle ne considère pas la position individuelle de chacune des véhicules et elle utilise des variables continues qu'il faut considérer comme des moyennes locales. De plus la route ne comporte pas d'embranchements, de feux rouges ou de parkings... La densité de trafic au point d'abscisse x et au temps t est noté $y(x, t)$. Pour mesurer concrètement cette densité on compte le nombre de véhicules situés sur la portion de route $[x, x+dx]$ à l'instant t et on divise par dx . Le flux de trafic au point d'abscisse x et au temps t est noté $\phi(x, t)$. Pour mesurer concrètement ce flux on compte le nombre de véhicules passant par x dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ à l'instant t et on divise par dt . On obtient une première équation, dite de conservation,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

équation typique de la mécanique des fluides et des phénomènes de diffusion.

Pour que le modèle soit complet on doit donner une seconde équation reliant flux et densité (ou nombre de véhicules). Cette seconde équation provient classiquement des relations d'interaction entre les véhicules. On n'approfondit pas ce point dans le présent modèle et on se contente d'une loi de comportement, qu'on déduit de mesures effectuées réellement.

Certaines études ont proposé une formule mathématique de la loi de comportement. On peut partir du constat suivant : si les véhicules sont peu nombreux les conducteurs ont tendance à rouler à une vitesse proche de la vitesse maximale V , si le nombre de véhicule augmente fortement la vitesse de chaque véhicule va diminuer jusqu'à s'approcher de 0 dans le cas de bouchons. On peut postuler (Greenshields) une décroissance affine et poser

$$\frac{v(n)}{V} = 1 - \frac{n}{N} \quad V = \text{vitesse maximum } N = \text{nombre maximum}$$

En identifiant le quotient flux / densité à une vitesse moyenne des véhicules on obtient une équation

$$\frac{1}{a} \frac{\phi}{y} = \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

qu'on peut écrire $\phi = cy(b - y)$, i.e. transport de vitesse variable $c(b - \delta)$. L'équation (0.5) devient

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -bc \left(1 - \frac{2}{b}y\right) \quad (0.6)$$

Cette équation aux dérivées partielles est non linéaire, on peut donner des solutions approchées par différentes méthodes d'analyse numérique. Cette équation (modèle de Greenshields) est connue sous le nom d'équation de Whitham, Lighthill, Richards.

Une généralisation du modèle de Greenshields consiste à poser $\phi = f(y)$ avec $f : [0, D] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(0) = f(D) = 0$, f concave sur $[0, D]$, $D =$ densité maximale envisageable. On considère cette possibilité dans le paragraphe suivant. Certaines études ont proposé d'autres formules de loi de comportement.

Dans le cas d'une relation entre flux et dérivées de la densité on aboutit à des EDP de diffusion, de transport-diffusion...

IV. Modèle de Greenshields, adaptation à des résultats expérimentaux. Généralisation

Partant d'une série de résultats mesurés (comme les 25 résultats donnés plus haut) on peut chercher la fonction $f : t \rightarrow ct(b - t)$, $t \in [0, b]$ qui passe au plus près des données expérimentales. C'est un problème de régression parabolique où b, c sont des constantes strictement positives à déterminer. Si la proximité recherchée est au sens quadratique, c'est un problème de projection orthogonale.

Même si les véhicules sont dans le modèle présenté des particules ponctuelles (justifiant par là les méthodes EDP en variables continues) il est clair qu'une densité limite existe en pratique :

notant λ la longueur minimum d'un véhicule, disons $\lambda = 4m$, on est conduit à prendre comme limite supérieure de la densité $\Delta = 1/4$ (nombre de véhicule par mètre). On peut aussi estimer Δ à partir des mesures effectuées. Si on commence par fixer $b = \Delta$, il reste à minimiser une distance par rapport à la seule variable c .

Dans un cadre plus général on considère l'ensemble K des fonctions $f : [0, D] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(0) = f(D) = 0$, f concave sur $[0, D]$. La concavité de f est justifiée dans certaines études par la décroissance du quotient flux / densité en fonction de la densité, i.e. le fait que la vitesse collective varie en sens inverse du nombre de véhicules par unité de longueur. On s'intéresse encore à $f \in K$ qui approche au mieux les données expérimentales.

Si D est fixé dans une première étape l'ensemble K est un convexe. Dans la recherche d'une solution aux moindres carrés il reste une norme hilbertienne à minimiser, de nouveau un problème de projection. On peut se placer dans un cadre fini-dimensionnel. On note $(y_1, \phi_1), \dots, (y_n, \phi_n)$ les résultats mesurés, supposant $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < D$ et on choisit un entier naturel $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $\|\cdot\|_Y$ la norme sur les polynômes réels de degré inférieur à $n+1$ définie par $\|p\|^2 = p(0)^2 + p(D)^2 + \sum_{i=1}^n |p(y_i)|^2$ et q le polynôme réel de degré inférieur à $n+1$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, q(y_i) = \phi_i$ ainsi que $q(0) = q(D) = 0$.

On s'intéresse au minimum de $\|f - q\|_Y$ pour $f \in K \cap \mathbb{R}_k[X]$. Pour $k = 2$ on retrouve la situation de Greenshields.

Si on ne souhaite pas fixer D préalablement on considère plutôt l'ensemble L des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues sur \mathbb{R}^+ , nulles en 0 et vérifiant il existe $D > 0$ tel que, pour $x > D, f(x) = 0$ la fonction $x \rightarrow f(x)/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Il vient de nouveau un problème de minimisation sur un ensemble L qui est convexe.

Rappelons que dans le cadre de problème de minimisation convexe on dispose de résultats théoriques sur l'existence d'un minimum, l'unicité du point donnant le minimum ainsi que d'algorithmes efficaces (méthodes de gradients ou d'uzawa par exemple). Si C est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert et g une fonction différentiable fortement convexe sur C , alors g admet un minimum global sur C , atteint en un point unique $a \in C$. De plus a est caractérisé par $\langle \nabla g(a), b - a \rangle > 0$ pour tout $b \in C$.

III. Extrait d'un sujet de concours CPGE

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , on note $x \ll y$ si pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a $x_i \gg y_i$.

Le vecteur nul de \mathbb{R}^n est noté $\vec{0}$ et le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont 1 est noté $\vec{1}$.

Si K est une partie non vide et convexe de \mathbb{R}^n et x un vecteur de \mathbb{R}^n , on appelle projection de x sur K et on note $p_K(x)$ s'il existe, tout vecteur y de K qui vérifie pour tout vecteur z de K ,

$$\|x - y\| \ll \|x - z\|$$

Partie I. Projection sur un convexe fermé

2. Exemple 2. Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , différent de $\{\vec{0}\}$ et de \mathbb{R}^n .
- Montrer que E est une partie convexe de \mathbb{R}^n . On admet qu'elle est fermée.
 - Dans cette question, E est l'ensemble des vecteurs $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ de \mathbb{R}^4 qui vérifient l'équation : $w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de \mathbb{R}^4 n'appartenant pas à E . Déterminer $\min_{w \in E} \|x - w\|$ et le vecteur $p(x)$.
- Cas général : soit K une partie convexe, fermée et non vide de \mathbb{R}^n , et x un vecteur de \mathbb{R}^n qui n'appartient pas à K .
- Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : pour tout z de K , $f(z) = \|x - z\|$.
 - Justifier la continuité de la fonction f .
 - Soit z_0 un vecteur quelconque de K . On considère la boule fermée B_0 de centre x et de rayon $\|x - z_0\|$. On pose : $K' = B_0 \cap K$. Justifier que K' est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n .
 - En déduire que f admet un minimum sur K' . Soit \hat{z} tel que $f(\hat{z}) = \min_{z \in K'} f(z)$.
 - Montrer que l'inégalité $\|x - z\| \geq \|x - \hat{z}\|$ est satisfaite pour tout vecteur z de K . Conclure.
 - a) Vérifier pour tous vecteurs a et b de \mathbb{R}^n , l'identité : $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2 = \frac{1}{2}\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\|x-b\|^2$.
 b) On pose : $d = \min_{z \in K} \|x - z\|$. Soit u et v deux vecteurs de K vérifiant $d = \|x - u\| = \|x - v\|$.
 À l'aide de la question précédente, montrer que $u = v$. Conclure.
 - On rappelle que $p(x)$ désigne la projection du vecteur x sur K .
 - Établir pour tout vecteur z de K et pour tout réel t de $[0, 1]$, l'inégalité : $\|x - p(x)\|^2 \leq \|x - (tz + (1-t)p(x))\|^2$.
 - En déduire pour tout z de K , l'inégalité : $\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0$.
 - Réciproquement, on suppose qu'il existe un vecteur y de K tel que pour tout vecteur z de K , on a : $\langle z - y, x - y \rangle \leq 0$. Montrer que $y = p(x)$. Conclure.
 - Établir l'inégalité : $\langle x - p(x), p(x) \rangle < \langle x - p(x), x \rangle$. Montrer que $x - p(x)$ sépare les ensembles K et $\{x\}$.

Partie II. Un cas particulier

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, des réels strictement positifs. On pose : $K = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 \leq 1\}$.

- Montrer que K est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de \mathbb{R}^n .
 Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur donné de \mathbb{R}^n n'appartenant pas à K et vérifiant pour tout i de $[1, n]$, $x_i > 0$. On pose : $K_0 = \{z \in K / \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 = 1\}$ et $K_1 = \{z \in K / \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 < 1\}$.
- Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : $f(z) = \|x - z\|^2$.
 - Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert K_1 .
 - La restriction de f à K_1 admet-elle des points critiques ? En déduire que $p(x)$ appartient à K_0 .
 - Montrer que les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, non toutes nulles.
- On définit l'ouvert Ω par : $\Omega = \{(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) / \forall i \in [1, n-1], z_i > 0 \text{ et } (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0) \in K_1\}$.

Soit Ψ et H les fonctions à valeurs réelles définies sur Ω par : $\Psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2\right)}$ et

$$H(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \Psi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}))^2.$$

On suppose que $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H .

On note $z_n^* = \Psi(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*, z_n^*)$.

- Montrer que z_n^* est strictement positif et que le vecteur z^* appartient à K_0 .

V. Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner des résultats de minimisation de fonctions convexes, avec ou sans contraintes. Donner une preuve de certains résultats.
- Montrer la convexité des ensembles K ou L considérés dans le texte.
- Donner des résultats d'existence, d'unicité pour les solutions d'une équation comme (0.6).

Aspect enseignement CPGE

- Donner la solution des questions 3, 4, 5. Quelles hypothèses utiliser en dimension infinie, quelle preuve proposer ?
- Prolonger la question 8 pour aboutir à la projection d'un vecteur sur l'ellipsoïde $\sum_i \alpha_i x_i^2 \ll 1$
- Envisager la régression linéaire ou parabolique comme des projections.

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Présenter un ou plusieurs algorithmes de recherche de minimum pour des fonctions convexes, sur des exemples, avec ou sans contraintes.
- Présenter une solution d'approximation aux moindres carrés pour les données expérimentales figurant page 1. Envisager des approximations de degrés $k = 2, 3$ ou 4 . Discuter. Illustrer graphiquement.
- Présenter un programme informatique permettant de calculer une solution approchée de l'équation (2). Illustrer la démarche par des représentations graphiques.

ANNEXE 1 : PROBLEME DE MATHEMATIQUES GENERALES

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante :

<http://www.education.gouv.fr/cid76545/sujets-des-epreuves-admissibilite-des-concours-agregation-session-2015.html>

ANNEXE 2 : PROBLEME D'ANALYSE ET PROBABILITES

On trouvera l'énoncé de l'épreuve à l'adresse suivante :

<http://www.education.gouv.fr/cid76545/sujets-des-epreuves-admissibilite-des-concours-agregation-session-2015.html>

ANNEXE 3 : LISTE DE LEÇONS, SESSION 2015

Les listes des leçons sont données à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation de leçons figurant sur les listes.

Ajoutant qu'une grande partie de ces leçons seront reprises pour la session 2016, des modifications et des évolutions sont possibles. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

• Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
7. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace vectoriel.
8. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
9. Représentations de groupes finis de petit cardinal
10. Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.
11. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Anneaux principaux. Applications.
14. Corps finis. Applications.
15. Anneau des séries formelles. Applications.
16. Extensions de corps. Exemples et applications.
17. Exemples d'équations diophantiennes
18. Droite projective et birapport
19. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
20. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
18. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
19. Résultant. Applications.
20. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
21. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
22. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.

Exemples et applications.

23. Déterminant. Exemples et applications.
24. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
25. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
26. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
27. Exponentielle de matrices. Applications.
28. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
29. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
30. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
31. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
32. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.
33. Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
34. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
35. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
36. Coniques. Applications.
37. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
38. Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies
39. Utilisation des groupes en géométrie.
40. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

• Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.
7. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
8. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
9. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
10. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
11. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
12. Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Exemples et applications.

13. Étude métrique des courbes. Exemples.
14. Sous-variétés de \mathbf{R}^n . Exemples
15. Applications des formules de TAYLOR.
16. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
17. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.
18. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
19. Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.
20. Convergence des suites numériques. Exemples et applications. Suites numériques.
21. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
22. Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
23. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
24. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
25. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
26. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
27. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
28. Espaces L^p , $1 \leq p \leq +\infty$.
29. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
30. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
31. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
32. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
33. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
34. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
35. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbf{C} . Exemples et applications.
36. Séries de FOURIER. Exemples et applications.
37. Exemples de problèmes d'interversion de limites.
38. Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
39. Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.
40. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.
41. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
42. Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.
43. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
44. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples

et applications

45. Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications

46. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications

47. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

48. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

49. Espaces de SCHWARTZ $S(\mathbf{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbf{R}^d)$ et $S^0(\mathbf{R}^d)$.

50. Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions

ANNEXE 4 : PROGRAMME D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES DU SECOND DEGRE

• Programme de la session 2016

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés K en général) sont supposés commutatifs.

1. Algèbre linéaire

1.1. Espaces vectoriels

- Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E , groupe linéaire $GL(E)$.
- Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.
- Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

1.2. Espaces vectoriels de dimension finie.

- Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases: isomorphisme avec K^n . Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
- Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un R -espace vectoriel..
- Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à

l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel. Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

- Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Diagonalisation, triangulisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes

2. Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

- Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
- Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n -ièmes de l'unité, racines primitives.
- Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
- Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
- Représentations d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal

3. Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles.

- Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de

module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.

- Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques. Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
- Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
- Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels. Le corps \mathbb{R} des nombres réels. Le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Théorème de D'Alembert-Gauss.
- Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun. Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau \mathbb{Z} et de l'algèbre $K[X]$ des polynômes sur le corps K . Polynômes irréductibles. Exemples: polynômes cyclotomiques dans $\mathbb{Q}[X]$, critère d'Eisenstein.
- Congruences dans \mathbb{Z} . Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de Gauss, systèmes linéaires. . .
- Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
- Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
- Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications

4. Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel.

- Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

- Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Procédés d'orthogonalisation.
- Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.
- Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3: groupe des rotations; produit mixte; produit vectoriel.
- Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
- Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n, \mathbb{C})$.

5. Géométries affine, projective et euclidienne.

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie

- Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux. Projection sur un convexe fermé.
- Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.
- Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. En dimension 2: classification des isométries, similitudes directes et indirectes. En dimension 3: rotations.
- Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
- Coniques et quadriques
Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3. Classification des coniques. Intersection de quadriques et résultant.

Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale

6. Analyse à une variable réelle.

▪ Nombres réels

Le corps \mathbb{R} des nombres réels. Topologie de \mathbb{R} . Sous-groupes additifs de \mathbb{R} . Droite numérique achevée. Suites de nombres réels: convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de \mathbb{R} . Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de \mathbb{R} . Parties connexes de \mathbb{R} .

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées

▪ Fonctions définies sur une partie de \mathbb{R} et à valeurs réelles

(a) Continuité

Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.

Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

(b) Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.

Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe C^k , de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

▪ Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

Propriétés de l'intégrale: linéarité, relation de Chasles, positivité. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales

▪ Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

▪ Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

- Fonctions usuelles
Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.
- Convexité
Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.
- Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.
- Polynôme d'interpolation de Lagrange.
- Méthodes d'approximation
Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.
- Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton. Estimation de l'erreur pour la méthode de Newton.
- Intégration numérique: méthode des trapèzes, de Simpson; estimation de l'erreur.

7. Analyse à une variable complexe

- Séries entières
Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence: continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.
Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.
Exponentielle complexe; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles
- Fonctions d'une variable complexe
Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme. Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.
Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.
Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus. Suites et séries de fonctions holomorphes

8. Calcul différentiel

- Topologie de \mathbb{R}^n
Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de \mathbb{R}^n .
- Fonctions différentiables

Applications différentiables sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe C^1 .

Matrice jacobienne. Applications de classe C^k . Dérivées partielles d'ordre k . Interspersion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young.

Étude locale des applications à valeurs dans \mathbb{R} . Développements limités. Recherche des extremums locaux.

Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

- Équations différentielles

Équations différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n , de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

Portrait de phase, comportement qualitatif. Systèmes différentiels linéaires.

Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants.

Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

9. Calcul intégral

- Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.

- Intégration

Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie

d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p , où $1 \ll p \ll \infty$: inégalités de Minkowski, Hölder et Jensen. Théorème de Fubini.

Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

- Analyse de Fourier

Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet et de Fejer. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval.

10. Probabilités

- Définition d'un espace probabilisé : événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli
- Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales et théorème de Bayes
- Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire: loi discrète et loi absolument continue. Fonction de répartition et densité.
- Exemples de variables aléatoires : variable de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.
- Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert.
- Indépendance de variables aléatoires. Loi conditionnelle d'une variable par rapport à une autre.
- Transformations exponentielles de lois: fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice. Liens avec l'indépendance et la convolution, application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.
- Convergences de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p , presque sûrement, en loi.
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres, applications en statistiques.
- Théorème de Lévy, théorème central limite, applications en statistiques.

11. Analyse fonctionnelle

- Topologie et espaces métriques
Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.
Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues.
Homéomorphismes. Produit fini d'espaces métriques.
Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.
Propriétés métriques: applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.
- Espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach Applications linéaires continues, norme.
Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace Banach.
Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz; théorème d'Ascoli. Complétude des espaces L^p , où $1 \leq p \leq +\infty$.
- Espaces de Hilbert
Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé. Dual d'un espace de Hilbert.
Cas des espaces L_2 .

Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de Hilbert

- Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur \mathbb{R}^d . Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).

Espace $S'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées.

Dérivation des distributions tempérées ; formule des sauts en dimension 1 ; formule de Stokes pour un demi-espace en dimension d .

Cas particulier des distributions à support compact dans \mathbb{R}^d .

Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact. Transformation de Fourier dans S et dans S' .

Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$

12. Géométrie différentielle

Sous-variétés de \mathbb{R}^n . Définitions équivalentes: graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans \mathbb{R}^3 : position par rapport au plan tangent. Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multiplicateurs de Lagrange.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 12 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les épreuves orales comportent trois épreuves :

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves est constitué des titres 1 à 12 ci-dessus.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation et calcul scientifique.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte choisi par le candidat.

Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve.

Thèmes des sujets de l'épreuve de modélisation calcul scientifique

L'épreuve de modélisation et calcul scientifique porte sur le programme général de l'agrégation, énoncé plus haut (titres 1 à 12), ainsi que sur le programme spécifique développé ci dessous, volontairement orienté vers les applications.

1. Calcul numérique et symbolique : simulation, intégration, différentiation, sommation et intégration, résolution d'équations algébriques ou différentielles.
2. Méthodes numériques pour les équations linéaires. Conditionnement. Factorisation LU. Méthode du gradient pour systèmes d'équations linéaires symétriques définis positifs. Recherche de valeurs propres (méthode de la puissance). Moindres carrés linéaires, sans contraintes.
3. Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de Newton. Vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
4. Intégration numérique à une variable. Rectangles, trapèzes, Simpson. Estimation de l'erreur. Equations différentielles ordinaires. Méthodes d'Euler explicite et implicite. Consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de Runge-Kutta4. Méthode de Monte-Carlo. Vitesse de convergence. Applications au calcul approché d'intégrales multiples.
5. Optimisation: extremums de fonctions réelles d'un nombre fini de variables réelles. Multiplicateurs de Lagrange. Algorithme de gradient à pas constant.
6. Probabilités. Lois de Variables aléatoires discrètes et à densité. Méthodes de simulation de variables aléatoires de lois données, en particulier pour les lois classiques : binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, gaussienne, gamma.
7. Chaines de Markov homogènes à espace d'états fini. Irréductibilité, apériodicité. Classification des états. Convergence.
8. Notion d'échantillonnage en statistique, estimateurs. Application des théorèmes de convergence pour les suites de variables aléatoires à l'estimation (lois des grands nombres, théorème de la limite centrée, lemme de Slutsky). Définition et construction d'intervalles de confiance.
9. Calcul matriciel : Operations élémentaires sur lignes et sur colonnes. Méthode du pivot de Gauss. Matrices à coefficients entiers. Application aux systèmes linéaires sur \mathbb{Z} et aux groupes abéliens de type fini.
10. Polynôme à une indéterminée. Evaluation (Horner). Interpolation (Lagrange). Localisation des racines dans \mathbb{R} , dans \mathbb{C} .

ANNEXE 5: BIBIOGRAPHIE

Nom	Titre	Edition
ABELSON H. SUSSMAN G. J. SUSSMAN J.	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AEBISCHER B	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géométrie	VUIBERT
AHUÉS M. CHATELIN F.	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. Collectif	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	HACHETTE
ALESSANDRIM.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLAIRE G	Analyse numérique et optimisation	Ecole poly-technique
ALLOUCHE J. P. SHALLIT J.	Automatic sequences theory, applications, Generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. MATHERON É.	Analyse complexe	CASSINI
ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques Tome 1A - Topologie Tome 1B - Fonctions numériques Tome 2 - Suites et séries numériques Tome 3 - Analyse fonctionnelle Tome 5 - Algèbre générale, polynômes Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation in C in Java in ML	CAMBRIDGE
ARIBAUD F. VAUTHIER J.	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. BERTIN J.	Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H.	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H.	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H.	Cours de Mathématiques 1. Algèbre 2. Analyse 3. Compléments d'analyse 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des <i>équations différentielles ordinaires</i>	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	lectures on partial differential equations SPINGER	SPINGER
ARNOLD A.	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCES

GUESSARIAN I.		
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIERVILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY
ARTINM.	Algebra PRENTICE HALL	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée Tome 1 Tome 2	PUF
AUTEBERT J.M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON
AUTEBERT J.M.	Théorie des langages et des automates	MASSON
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON
BAASE S. VAN GELDER A.	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A., PETIT A. SANTHAM., WEIL P., ZEITOUNM.	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	CASSINI
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN
BARBE Ph. LEDOUXM.	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRETM. BENIDIRM.	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. PESKINE C.	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques Tome 1 Tome 2	MASSON
BHATIA R.	Matrix Analysis	SPRINGER
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BENDER C. ORSZAG S.	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL
BENIDIRM. BARRETM.	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BENOIST J. et Alii	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	PEARSON EDUCATION
BENOIST J.SALINIER A.	Exercices de calcul intégral	Dunod
BENZONI-GAVAGE S	Calcul différentiel et équations différentielles	DUNOD
BERCU B. CHAFAI D.	Modélisation stochastique et simulation	DUNOD
BERGER M. GOSTIAUX B.	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X.	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie Index	CÉDIC/NATHAN

	1. Action de groupes, espaces affines et projectifs 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères 3. Convexes et polyèdres, polyèdres réguliers, aires et volumes 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BERGER M.	Géométrie vivante	CASSINI
BERLINE N. SABBAH C.	Groupes finis, journées X-UPS 2000	EDITIONS DE L'X
BHATIA R.	Matrix analysis 1	SPRINGER
BICKEL P.J. DOKSUM K.A.	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. MOISAN L.	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BILLINGSLEY P.	Probability and measure	COPYRIGHTED MATERIAL
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BOISSONAT J.D. YVINEC M.	Géométrie algébrique	EDISCIENCE
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C. PENNEQUIN D.	Optimisation numérique	SPRINGER
BONY J.M	Cours d'analyse	Ecole polytechnique
BONY J.M	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	Ecole polytechnique
BOUALEMH. BROUZET J.C. ELSNER B. KACZMAREK L.	Mathématique L1	PEARSON EDUCATION
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à X Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. RICHARD D.	Groupes	HERMANN
BREMAUD P	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. PAGES G.	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J.	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE

CABANE R. LEBOEUF C.	Algèbre linéaire 1. Espaces vectoriels , Polynômes 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	CASSINI
CANDELPERGHER B	Théorie des probabilités	<i>Calvage et Mounet</i>
CALDERO P. GERMONI J	Histoires hédonistes de groupes et de géométries	<i>Calvage et Mounet</i>
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	VUIBERT
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	WILEY INTERSCIENCE
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe	MIR
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	EDITIONS DE L'X
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 2 Analyse 3	MASSON
CHARPENTIER E. NIKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui Vol 1 Vol 2 Vol 3 Vol 4	ELLIPSES
CHARLES J. MBEKHTAM. QUEFFELEC H.	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	ELLIPSES
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHOIMET D. QUEFFELEC H.	Analyse mathématique	CASSINI
CHRISTOL G. PILBOSSIAN P. YAMMINE S.	Algèbre 1 Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON
COGIS O. ROBERT C.	Au-delà des ponts de Königsberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET H. GIRARD B.	Mathématique BTS industriel	NATHAN

PERRIER C		
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	EDITIONS DE L'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. LASCAR D.	Logique mathématique 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD
CORMEN T. H. LEISERSON C. E. RIVEST R. L. STEIN C.	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
COTRELLM. GENON-CATALOT V. DUHAMEL C. MEYRE T.	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. HILBERT D.	Methods of Mathematical Physics Volume 1 Volume 2	JOHN WILEY
COUSINEAU G. MAUNY M.	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. DUFLO M.	Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. REVUZ D. SCHREIBER M.	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DARTE A. VAUDENAY S.	Algorithmique et optimisation	DUNOD
DAVID R. NOUR K. RAFFALI C.	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DE KONNINCK J.M. MERCIER A.	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale QUE-SAIS-JE ?	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DELCOURT J	Théorie des groupes	DUNOD
DELTHEIL R. CAIRE D.	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
DEMAZUREM.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZUREM.	Cours d'algèbre : primalité, ivisibilité, codes	CASSINI
DEMAZUREM.	Cours d'algèbre	CASSINI
DEMBO A. ZEITOUNI O.	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
DESCHAMPS	Mathématiques, cours et exercices corrigés	DUNOD

WARUSFEL MOULIN, RUAUD MIQUEL, SIFRE	1ère année MPSI, PCSI, PTSI 2ème année MP, PC, PSI	
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESPRÉS B	Lois de conservations eulériennes, lagrangiennes et méthodes numériques	Springer
DEVANZ C. ELHODAIBIM.	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	CASSINI
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse Fondements de l'analyse moderne Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIERVILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle Première année Deuxième année	GAUTHIERVILLARS
DOWEK G. LEVYH J.-J	Introduction à la théorie des langages de programmation	EDITIONS DE L'X
DRAPPER N. SCHMITH H.	Applied regression analysis	WILEY
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. WARUSFEL A.	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	VUIBERT
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYMH. Mac KEAN H.P.	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE,MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT	Les Nombres	VUIBERT
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD
EL KACIMI ALAOUI A. QUEFFÉLEC H. SACRÉ C. VASSALLO V.	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
ENGEL A.	Solutions d'expert Vol 1 Vol 2	CASSINI
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes Analyse. Volume 1 Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques 2 Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles	HATIER

	Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse Analyse 2 : Éléments de topologie générale	
FADDEEV D. SOMINSKI	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. BEEF C.	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET
FARAUT J. KHALILI E.	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications Volume 1 Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions Tome 1 - Topologie Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FONTANEZ F. RANDÉ B.	Les clefs pour les Mines	CALVAGE ET MOUNET
FRANCHINI J. JACQUENS J-C.	Mathématiques Spéciales Algèbre Analyse 1 Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	CASSINI
FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	CASSINI
FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	CASSINI
FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	CASSINI
FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	CASSINI
FRANCINOUS. GIANELLA H.	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRENKEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J. MATIGNON M.	Algèbre et géométrie	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
FULTONW.	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI

GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices Tome 1 Tome 2	DUNOD
GAREYM. JOHNSON D.	Computers and intractability	FREEMAN
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
GATHEN (von zur) J. GERHARD J	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	CASSINI
GRANGON Y.	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	DUNOD
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Tome 1 Tome 2 Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. VAN LOAN C.F.	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. TOSEL N.	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation ² Topologie et Analyse fonctionnelle ² Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales ² Tome 1 - Algèbre ² Tome 2 - Topologie et analyse réelle ² Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel ² Tome 4 - Géométrie affine et métrique ² Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOUDON Th	Intégration	ELLIPSES
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M ² ² Algèbre ² Analyse	ELLIPSES
GRAHAMR. KNUTH D. PATASHNIK O.	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	. Intégration	HERMANN
GRANJON Y.	. Informatique, algorithmes en pascal et en C	DUNOD
GRENIER J.P.	. Debuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GREUBW.	. Linear Algebra	SPRINGER VERLAG
GRIMMET G. WELSH D.	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
HABSIEGER L. MARTEL V.	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. TARANCO A.	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. HOCKSM.	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER

KULISH U. RATZ D.		
HARDY G.H. WRIGH E.M.	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D.	Computer LTD.What they really can't do	OXFORD
HAREL D. FELDMAN Y.	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. TORTRAT A.	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis Volume 1 Volume 2 Volume 3	WILEYINTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	CALVAGE ET MOUNET
HIRSCH F. LACOMBE G.	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART SCIUTO	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOPCROFT J.E. MOTWANI R. ULLMAN J. D.	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
HUBBARD J.HUBERT F	Calcul scientifique T1	Vuibert
HUBBARD J.HUBERT F	Calcul scientifique T2	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	CALVAGE ET MOUNET
IRELAND K. ROSENM.	A Classical Introduction toModern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG
ISAAC R.	initiation aux probabilités	(Trad. R.Mansuy) VUIBERTSPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers QUE SAIS-JE ?	PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra 2 Tome I 2 Tome II	FREEMAN AND CO
JACOD J. PROTTER P.	L'essentiel en théorie des probabilités	CASSINI
KAHANE J.P. GILLES P.	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	DOVER
KERBRAT Y. BRAEMER J-M.	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. RITCHIE D.	Le langage C	DUNOD
KNUTH D.E.	The art of computer programming Volume 1 : Fundamental algorithms Volume 2 : Seminumerical algorithms Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISONWESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography	quantite1
KOLMOGOROV A. FOMINE S.	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES
de KONNINCK J.M. MERCIER A.	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercices for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction auxMathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD

KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI
KUNG J.P.S. ROTA G-C. YAN C.H.	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE
LACOMME P. PRINS C. SEVAUXM.	Algorithmes de graphes	EYROLLES
LACROIX Y. MAZLIAK L.	Probabilités, variables aléatoires... Niveau M1	ELLIPSES
LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analogmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire Tome 1 Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISONWESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISONWESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de temps	CASSINI
LASCAUX Th. THÉODOR R	analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 et 2	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Functional analysis	WILEY
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBOEUF C. GUEGAND J. ROQUE J.L. LANDRY P.	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. HÉMERY C.	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. SACRÉ C.	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. JAKUBOWICZ D.	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales Tome 1 : Topologie Tome 3 : Intégration et sommation Tome 4 : Analyse en dimension finie Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS Tome I - Algèbre 1 Tome 2 - Algèbre et géométrie Tome 3 - Analyse 1 Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques Tome 1 pour M-M' : Algèbre Tome 1 pour A-A' : Algèbre Tome 2 : Analyse Tome 3 : Géométrie et cinématique Tome 4 : Equations différentielles, intégrales	DUNOD

	multiples	
LEICHTNAM E. LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. MEYER Y. JOULAIN C. LEFEBVRE J.	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
LOTHAIREM.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. BIRKHOFF G.	Algèbre 1 : Structures fondamentales 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIERVILLARS
MACKI J. STRAUSS A.	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MAKAROV B.M. GOLUZINA M.G. LODKIN A.A. PODKORYTOV A.N.	Problèmes d'analyse réelle	CASSINI
MALLIAVINM. P. WARUSFEL A.	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
MALLIAVINM. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	UsingMatlab version 5 UsingMatlab version 6 Statistics Toolbox UsingMatlab Graphics	
MANSUY R. RANDÉ B.	Les clefs pour l' X	CALVAGE ET MOUNET
MANSUY R. MNEIMNÉ R.	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes	Vuibert
MARCE S. DEVAL-GUILLY E.	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES
MARCO J.P. et Alii	ANALYSE L3	Pearson
MASCART H. STOKA M.	Fonctions d'une variable réelle 2 Tome 2 : Exercices et corrigés 2 Tome 3 : Exercices et corrigés 2 Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAURY B	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
MENEZES A.J. van OORSCHOT P.C. VANSTONA S.A.	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS
MENEZES A.J. MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilité	DUNOD

MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES ELLIPSES ELLIPSES
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Éléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET
MNEIMNÉ R. TESTARD F.	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. VERNOTTE A. TOSEL N.	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. VERNOTTE A.	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques - Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI - Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI - Analyse 3 MP, PSI, PC, PT - Analyse 4 MP, PSI, PC, PT - Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI - Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT - Exercices d'analyse MPSI - Exercices d'analyse MP - Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique Tome 1 Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. NEWMAN J. R. GÖDEL K. GIRARD J. Y.	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. QUITTE C.	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
O'ROURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation) Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	PEARSON EDUCATION
PAGES G. BOUZITAT C.	En passant par hasard . . . Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. WOLFMANN J.	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	DUNOD
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF

PERRIN D.	Mathématiques d'école	CASSINI
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PETROVŠEK WILF ZEILBERGER	A=B A.K.	PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
PÓLYA G. SZEGŐ G.	Problems and Theorems in Analysis Volume I Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
POUNDSTONE.	Le dilemme du prisonnier	CASSINI
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
PREPARATA F.P. SHAMOSM.I.	Computational géométrie - an introduction	SPRINGER
PRESSW. FLANNERY B. TEUKOLSKI S. VETTERLINGW.	Numerical recipes in Pascal	CAMBRIDGE
PUTZ J.F.	Maple animation	CHAPMAN AND HALL
QUATERONI A. SACCO R.SALERI F	Méthodes numériques	Springer
QUATERONI A. SALERI F.GERVASIO P.	Calcul scientifique	Springer
QUEFFELEC H. ZUILY C.	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. RABINOWITCH P	A first course in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Cours de Mathématiques spéciales 1- Algèbre 2- Algèbre et applications à la géométrie 3- Topologie et éléments d'analyse 4- Séries et équations différentielles 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Exercices avec solutions Algèbre Analyse 1 Analyse 2	MASSON
RAMIS J.P. WARUSFEL A.	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
RANDÉ B. TAIEB F.	Les clefs pour l'X CALVAGE	MOUNET
RANDÉ B. MANSUY R.	Les clefs pour l'X (2) CALVAGE	MOUNET
REINHARDT F. SOEDER H.	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. NAGY SZ. B.	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIERVILLARS

RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique – Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROUDIER H.	Algèbre linéaire.	Cours et exercices VUIBERT
ROUSSEAU Y. SAINT-AUBIN Y.	Mathématiques et technologie	SPRINGER (SUMAT)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES
RUAUD J.F. WARUSFEL A.	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDINW.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDINW.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDINW.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SA EARP R. TOUBIANA E.	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	CASSINI
SAINSAULIEU L	Calcul scientifique	Dunod
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	CALVAGE ET MOUNET
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
SAKS S. ZYGmund A.	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. MERLIER T. PILIBOSSIAN Ph. YAMMINE S.	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT
SCHATZMAN M	Analyse numérique, une approche mathématique	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY
SCHWARTZ L.	Analyse I Topologie générale et analyse fonctionnelle II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse Tome 1 Tome 2	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEGEWICK R.	Algorithms ADDISON	WESLEY
SEGEWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION
SEGEWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	CALVAGE ET MOUNET
SELBERHERR S. STIPPEL H. STRASSER E.	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	DUNOD
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	Analyse 3 Analyse 4	ELLIPSES

SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	DOVER
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD
SIPSERM.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL
STROUSTRUP B	Le langage C++	PEARSON EDUCATION
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI
SZPIRGLAS A.et Alii	Algèbre L3	Pearson
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algèbre	DUNOD
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	CALVAGE ET MOUNET
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
TENENBAUMG. WUJ.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUMG.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUMG.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUMG.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	BELIN
TENENBAUMG. MENDÈS-FRANCE M.	Les nombres premiers QUE SAIS-JE ?	PUF
TENENBAUMG. MENDÈS-FRANCE M.	Les nombres premiers QUE SAIS-JE ?	PUF
TESTARD F	Analyse mathématique	Calvage etMounet
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A GIRARD J. Y.	La Machine de Turing	SEUIL
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique I Théorie des fonctions II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUQUOIS B.	OutilsMathématiques. Probabilités	HERMANN
VAUTHIER J. PRAT J-J.	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes – Équations différentielles	HERMANN
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	HERMANN
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies CLASSIQUES	HACHETTE
WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER NICOLAS	Mathématiques Analyse Arithmétique Géométrie	VUIBERT

	Probabilités	
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HALL
WHITTAKER E.T. WATSON G.N.	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity A.K.	PETERS
WILLEMM.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WILLEMM.	Principes d'analyse fonctionnelle	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages MIT	PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YGER A.WEIL J-A et Alii	Mathématiques appliquées L3	Pearson
YOUNG D.M. GREGORY R.T.	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math	Calvage et Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. QUEFFELEC H.	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON
ZUILY Cl. QUEFFELEC H.	Problèmes de distributions	CASSINI
ZUILY Cl	Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles	Dunod

