Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle
de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

RAPPORT D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES

SESSION 2019

AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE - SESSION 2019

AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE SESSION 2019

Rapport du jury présenté par :

Professeur Ouknine Youssef : Président du jury

Université Cadi Ayyad

Faculté des Sciences Semlalia

e–mail: ouknine@uca.ma

Table des Matières

Chapitre 1

Composition du jury

1.1 Directoire

Ouknine Youssef	Professeur de l'Enseignement Supérieur	Marrakech
Ouassou Idir	Professeur de l'Enseignement Supérieur	Marrakech

1.2 Jury

1.2.1 Analyse et Probabilités

1. Bakhouch Brahim
2. Chaira Abdellatif
3. Erraoui Mohamed
4. Taibi Mimoune

1.2.2 Algèbre et Géométrie

1. Hajmi Said
2. Oukacha Diyer
3. Sadik Brahim
4. Zguiti Hassan

1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique

1. Elkahoui M'hammed
2. Gonnord Stephane
3. Maarouf Hamid
4. Nasroallah Abdelaziz

Chapitre 2

Introduction

La session 2019 du concours d'agrégation de mathématiques a été caractérisée par l'enrichissement de certains comités du jury par de nouveaux membres, notamment le comité d'Analyse et Probabilités et le comité d'Algèbre et Géométrie. Suite aux précédentes sessions, elle est ouverte aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instaurée aux C.R.M.E.F du Royaume et aux candidats libres titulaires d'un Master da mathématiques ou équivalent. Elle entre aussi dans le cadre de la réforme de l'épreuve de Modélisation et Calcul Scientifique depuis l'année 2015. Ainsi l'année 2019 est considérée comme la cinquième année de transition pendant laquelle nous avons fait cohabiter textes et leçons : Contrairement à leurs prédécesseurs, les candidats qui ont subi les épreuves orales du concours ont été confrontés à une nouvelle épreuve de modélisation qui comprenait deux éléments, à savoir le choix d'une leçon, dans la pure tradition du concours ou le choix d'un texte.

Au terme de la préparation, les candidats subissent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves de l'écrit, sous la présidence d'un jury français et en présence de représentants marocains.
Les épreuves sont ensuite envoyées en France pour correction. L'opération de déchiffrage des résultats se fait en France en présence du président du jury marocain. Une réunion du jury marocain est tenue à Rabat pour la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant le jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission.

La session 2019 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine s'est caractérisée par l'augmentation du nombre de postes offerts par rapport à la session précédente : 45 postes (contre 30 en 2018). De même, une augmentation du nombre des inscrits au concours en 2019 par rapport à 2018 est enregistrée :

- le nombre de candidats inscrits était de 191 (contre 170 en 2018), ce qui correspond à une augmentation d'environ 10,99 %

- le nombre de candidats ayant composé aux deux épreuves écrites d'agrégation était de 128,

- 65 candidats ont été déclarés admissibles (contre 70 en 2018) et leur moyenne était de 8,28/20 (contre 7,23/20 en 2018), le dernier admissible ayant 6,75/20 (contre 5/20 en 2018).

- 23 candidats (contre 20 en 2018) ont été déclarés admis et leur moyenne était de 10,87/20 (10,68/20 en 2018).

Le jury souligne qu'il y avait des candidats ingénieurs d'état parmi les candidats officiels des sessions 2016, 2017, 2018 et 2019. De même cette année il y a des candidats de la première année de la formation C.R.M.E.F.

Ce rapport du jury se veut formatif, son objectif est d'aider les candidats à préparer les examens de la session 2020.
Nous espérons que les conseils apportés dans ce rapport permettront aux futurs candidats de se préparer comme il se doit à cette épreuve.

En ce qui concerne le déroulement du concours, je tiens à remercier vivement, pour le soutien moral et matériel :

1. L'ensemble de mes collègues membres du jury.
2. Le Centre National des Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation.
3. L'Unité Centrale de la Formation des Cadres.
4. La direction du C.R.M.E.F de Rabat.

Ces équipes n'ont épargné aucun effort pour la réussite et le bon déroulement de ce concours.

Chapitre 3

Déroulement du concours et statistiques

3.1 Déroulement de la session 2019

Déroulement des épreuves écrites

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2019 se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- le jeudi 22 mars 2018 pour l'épreuve de mathématiques générales (voir l'Annexe),
- le vendredi 23 mars 2018 pour l'épreuve d'analyse et probabilités (voir l'Annexe),

Les délibérations pour l'admissibilité (pour tous les candidats français, marocains et tunisiens) ont eu lieu le mercredi 16 mai 2018 de 10h à 17 h à Telecom ParisTech., 46 rue Barrault 75013 Paris sous la présidence du président du jury de l'agrégation externe de mathématiques française et des deux présidents de l'agrégation marociane et tunisienne. la liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 18 mai 2018.
Rappelons que Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient le Maroc, la France et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en France et en Tunisie ; **les barres d'admissibilité pour les étudiants du Maroc et la Tunisie est au moins égale à celle de la barre fixée par le jury français.**

Les candidats admissibles ont reçu une convocation, indiquant les onze jours, du Vendredi 14 Juin 2019 au Lundi 24 Juin 2019, de passage prévus pour leurs épreuves d'admission. Toutefois, pour connaître les horaires précis d'interrogation, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires étaient, par défaut, invités à se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure sera reconduite l'an prochain.

Le concours de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique) ou dans l'enseignement supérieur (grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau bac +3 ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Déroulement des épreuves orales

Les épeuves d'admission se sont déroulées du Samedi 15 Juin au Samedi 22 juin 2019. La liste d'admission a été publiée le lundi 24 Juin 2019. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves :

- Analyse et probabilités ;
- Algèbre et géométrie ;
- Modélisation et calcul scientifique

Vendredi 14 juin 2019 à partir de 16h00 au CRMEF, Rabat

- Réunion d'accueil présidée par M. OUKNINE, président du jury ;
- Préparation des couplages et mise sous enveloppes ;
- Elaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve ;
- Validation, par les candidats, du planning anonyme de passage par épreuve ;
- Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats vers 16h 15 mn;
- Tirage au sort par les candidats des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves vers 17h ;
- Inspection, par les membres du jury, de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôle des ouvrages apportés par les candidats à partir de 17h30 mn.

Remarque 3.1.1

- *Il est rappelé que pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place à la bibliothèque du CPAM. Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il peut lui même apporter. Ces ouvrages ne doivent pas comporter de notes manuscrites et doivent être remis à l'administration la veille du commencement du concours, afin que le jury puisse les contrôler avant d'autoriser leur utilisation. Ainsi, après enregistrement, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.*
- *la saisie des notes se fait au fur et à mesure du déroulement des épreuves.*

Du Samedi 15 Juin au Samedi 22 Juin 2019 : Déroulement des épreuves orales ;

Dimanche 23 Juin 2019 de 09 h à 12 h : délibérations

Lundi 24 Juin 2019 de 09 h à 12 h : proclamation des résultats et réunion avec les formateurs des CRMEF du Royaume.

3.2 Résultats généraux

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	191
Postes mis au concours	45
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	128
Candidats eliminés	0
Candidats admissibles	65
Candidats admis	23

Tableau 1 - Résultats généraux de la session 2019

Candidats admis :

Liste des candidats admis par ordre alphabetique et la liste des candidats admis et proposés par le jury pour effectuer un stage probatoire en CPG

Résultat du concours national
de l'agrégation de mathématiques
Session 2019

Liste des admis par ordre alphabétique

Ordre	Nom	Prénoms	Décision du jury
1	ACHKOUN	KHADIJA	Admis
2	ATMANI	MOHAMMED	Admis
3	BAHTAT	SAID	Admis
4	BENDADA	MERYEM	Admis
5	BOUNACER	HAMZA	Admis
6	DKHISSI	HAJAR	Admis
7	EL ABBADI	SABER	Admis
8	EL BOUZIDI	AMINE	Admis
9	EL HABIB	TAH	Admis
10	ELLAHYANI	BRAHIM	Admis
11	HAMDI	MOKHTAR	Admis
12	HOUMAIRI	ADAM	Admis
13	IDRISSI	MOHAMED	Admis
14	IMLAL	LAHCEN	Admis
15	KARIM	ABDELMAJID	Admis
16	LAASSILA	SALAH-EDDINE	Admis
17	MOUATADID	LHOUSAIN	Admis
18	NASRI	MOUAD	Admis
19	OMARI	YOUSSEF	Admis
20	RHORDMANI	SOUMIA	Admis
21	SGHAIR	MOHAMED	Admis
22	TOUILY	MOHAMMED	Admis
23	ZIYAT	MOHAMMED	Admis

Nombre total de candidats déclarés admis : Vingt trois (23)

Résultat du concours national
de l'agrégation de mathématiques
Session 2019

Candidats admis et proposés pour effectuer un stage probatoire en CPGE

Ordre	Nom	Prénoms	Décision du jury
1	ACHKOUN	KHADIJA	Admis
2	ATMANI	MOHAMMED	Admis
3	BAHTAT	SAID	Admis
4	BENDADA	MERYEM	Admis
5	BOUNACER	HAMZA	Admis
6	EL ABBADI	SABER	Admis
7	EL BOUZIDI	AMINE	Admis
8	ELLAHYANI	BRAHIM	Admis
9	IMLAL	LAHCEN	Admis
10	KARIM	ABDELMAJID	Admis
11	LAASSILA	SALAH-EDDINE	Admis
12	OMARI	YOUSSEF	Admis
13	RHORDMANI	SOUMIA	Admis
14	TOUILY	MOHAMMED	Admis
15	ZIYAT	MOHAMMED	Admis

Candidats proposés pour effectuer un stage probatoire en CPGE : Quinze (15)

Chapitre 4

Sommaires sur les notes obtenues

4.1 Répartition des notes des épreuves écrites

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AP : Analyse et Probabilités
- MG : Mathématiques générales

4.1.1 Répartition des candidats admissibles selon le genre

Parmi les candidats admissibles on trouve :

Sexe	Nombre	Pourcentage
Femme	5	7,69 %
Hommes	60	92,31%

Répartition des admissibles selon le genre

4.1.2 Répartition des notes des épreuves écrites

Le jury de l'agrégation de mathématiques avait fixé la barre d'admissibilité à 53,6/160.
On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite.

Epreuve	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Mathématiques générales (note sur 20)	5	11,25	8,003	1,5	8
Analyse et probabilités (note sur 20)	5,5	15,25	8,56	1,713	8
Total écrit (note sur 40)	13,5	22,75	16,565	2,29	16

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

4.2 Répartition des notes des épreuves orales

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AG : Algèbre et Géométrie
- AP : Analyse et Probabilités
- MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale.

Epreuve	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	12	76	35,55	13,65	32
Analyse et probabilités (notes sur 80)	21	70	39,95	11,25	40
Modélisation et calcul scientifique (/80)	10	76	34,68	16,36	32
Total oral (note sur 240)	118	222	144,22	26,60	217

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison : de 2015 à 2019

Effectifs détaillés des candidats aux épreuves écrites de 2015 et 2019

Année	2015		2016		2017		2018		2019	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Inscrits	99	99	60	60	117	117	170	170	191	191
Présents	53	53	47	47	65	65	107	107	128	128
Absents	46	46	13	13	52	52	63	63	63	63
Note moyenne sur 20	7,37	7,73	9,82	8,79	5,47	6,50	6,8	7,64	6,5	7

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2015		2016		2017		2018		2019	
Nombre d'admis	16		25		43		70		65	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Moyenne sur 20	7,37	7,73	9,82	8,79	7,28	8,14	6,8	7,64	7,39	7,74

La moyenne générale des épreuves écrites des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Admissibles	16	25	43	70	65
Moyenne des épreuves sur 20	7,55	8,30	7,71	7,22	7,55

4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison : de 2015 à 2019

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admissibles est comme suit :

Année	2015			2016			2017			2018			2019		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Présents	15	15	15	25	25	25	43	43	43	63	63	63	61	61	61
Moyenne	48,26	39,4	35,8	47,44	44,4	31,4	40,87	34,10	31,4	44,49	35,16	34,73	35,55	39,95	34,68

La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles est comme suit:

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Admissibles	14	16	25	38	63	65
Moyenne des épreuves sur 80	37,62	41,15	41,08	35,45	38,126	36,80

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admis est comme suit :

Année	2016			2017			2018			2019		
Nombre d'admis	17			15			20			23		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Moyenne sur 80	53,12	51,65	37	53,07	49,27	40,07	56,2	42,8	49,3	46,17	47,74	50,30

La moyenne générale des candidats admis est comme suit :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Admis	07	09	17	15	20	23
Moyenne des épreuves sur 80	45,09	46,81	44,29	47,47	42,72	43,48

4.3 Evolution du nombre de candidats

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

Année	Nombre de Candidats Marocains	Nombre de Candidats Admissibles	Nombre de Candidats Admis
1988	8	7	3
1989	17	17	10
1990	29	23	16
1991	28	27	21
1992	27	27	24
1993	24	22	19
1994	24	22	19
1995	32	24	20
1996	36	22	20
1997	22	15	15
1998	28	11	11
1999	34	20	18
2000	37	14	13
2001	44	21	16
2002	38	22	16
2003	37	28	18
2004	34	28	14
2005	25	20	11
2006	38	15	08
2007	55	11	08
2008	64	25	16
2009	39	17	13
2010	28	03	02
2011	35	13	04
2012	77	15	06
2013	63	20	11
2014	61	14	07
2015	93	16	09
2016	47	25	17
2017	63	43	15
2018	107	70	20
2019	191	65	23

Chapitre 5

Déroulement des épreuves orales

Le rapport qui suit, précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats ; ainsi que les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise aux épreuves orales.

5.1 Modalités pratiques

5.1.1 Oral 1: Epreuve d'algèbre et géométrie

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de trois heures (3h) pour le préparer. Durant cette préparation le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'agrégation mais n'a pas accès à l'Internet ni à tout autre objet électronique.
Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Les livres doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés) et

- Les livres doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à la disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages $A4$ au maximum et possèdent une marge de $1cm$ sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc. pour qu'il soit le plus lisible possible. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement, sur le plan, les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites qu'il avait produit durant la préparation.
L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (6 minutes maximum) pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré : il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements en égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Il faut veiller à rester au niveau de l'Agrégation. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement.

Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan presenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. Il est essentiel que le candidat maîtrise ce qu'il propose. Il doit s'attendre à ce que le jury lui pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon. Le but est de voir le candidat dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique : faire une analyse de l'exercice, établir des liens avec les résultats connus (qui peuvent être ceux du plan), proposer des calculs et raisonnements pouvant conduire à la solution de la question posée. La qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

5.1.2 Oral 2 : Epreuve d'analyse et probabilités :

Les modalités pratiques sont les mêmes que celles de l'oral d'Algèbre et Géométrie.
Les probabilités et les statistiques sont utilisées ensemble dans de nombreuses applications où l'imprévu et le hasard dominent. Les probabilités sont très utiles dans les mécanismes décisionnels en univers incertain. Avec l'informatique, des simulations aléatoires peuvent être réalisées afin d'aider à la prise de décision dans de nombreux cas, comme l'évaluation des risques financiers (risques sur les marchés pour les banques), à fixer les prix de produits financiers et des primes de contrats d'assurance, compte tenu des nombreux risques ayant pour origine le marché ou le client

(secteur d'assurances), les mesures d'audience des médias par des instituts de sondage, les prévisions d'appel sur téléphone portable pour optimiser le déploiement du réseau et les études de sureté de fonctionnement.
Aussi depuis les années 1980, les banques ont fait recours aux mathématiciens et la tendance de recrutement est plus récente au niveau des assurances. Les compétences exigées couvrent les mathématiques appliquées aux finances et à l'assurance (statistique, probabilités et actuariat). Le marché dans ce secteur est très prometeur.
Tenant compte de ces tendances observées sur le marché de l'emploi, la plupart des grandes écoles d'ingénieurs, ont creé des filières d'ingénierie financière pour former des compétences nécessaires afin de comprendre et maitriser la complexité des marchés financiers.

5.1.3 Oral 3 : Epreuve de modélisation et calcul scientifique :

Le candidat choisit entre un texte et une leçon. Il dispose de 4 heures de préparation, pendant lesquelles il dispose des ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation. Le candidat peut disposer de ses propres livres sous les deux conditions citées dans le paragraphe 5.1.1.

Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve.
Les textes sont surmontés du bandeau suivant:

- Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.

  Les textes se terminent par le bandeau suivant :

- Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en oeuvre.

L'interrogation dure 1 heure et quart, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.
Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions. Le candidat dispose pendant sa préparation

et l'interrogation d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Scilab et Python. Les supports informatiques (USB, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique comme par exemple des clés usb personnelles. Une imprimante sera mise à disposition des candidats dans la salle de préparation.
Dans cette épreuve, le candidat est appelé à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème concret en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer le plan qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.
La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâttie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.
La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant.

5.2 Remarques des commissions des épreuves orales

5.2.1 Remarques de la commission d'Algèbre et Géométrie

L'épreuve orale d'algébre et géométrie s'est organisée en trois temps.

1. Le premier volet de l'épreuve est consacré à la présentation du plan de la leçon que le candidat a choisie. Elle doit durer 10 minutes au maximum. Ce délai est en général respecté par la majorité des candidats.
   Sur le fond le Jury a relevé néanmoins un manque de structure dans l'élaboration de certains plans, ainsi qu'une carence en ce qui concerne les exemples et les applications (surtout ceux et celles tirés de la géométrie) et des aspects algorithmiques.

2. La deuxième phase de l'épreuve est réservée au développement. Elle doit durer 20 minutes au maximum. Le candidat est sensé proposer au minimum deux développements.
   Le jury a remarqué que ce délai n'est pas respecté par quelques candidats, soit parce que le développement proposé manque de consistance, auquel cas il est traité en moins de dix minutes, soit parce que le développement est mal maîtrisé par le candidat, auquel cas il y'a eu un dépassement des 20 minutes accordées. Le Jury est amené à demander au candidat de conclure, ce qui pénalise la note réservée à ce volet.

Le Jury a noté aussi que certains candidats ont admis des résultats majeurs de leur plan qui, une fois acquis l'objet du développement devient trivial et dépourvu de toute importance.

3. La troisième phase est réservée aux discussions et interrogations des membres de la commission. Ce moment d'interaction offre au Jury l'occasion de

   (a) S'assurer de la bonne maîtrise de la démonstration du thème que le candidat vient de développer et de discuter de son adéquation avec la leçon.

   (b) Tester l'appropriation par le candidat de toutes les notions présentées dans son plan. Le jury a noté que certains candidats ont proposé des plans qui dépassent largement la compétence et le niveau maîtrisé.

   (c) Proposer des exercices en relation directe avec la leçon.
   Sur ce point le Jury a noté que certains candidats ont pu développer certains thèmes assez forts parce qu'ils les ont appris par coeur, mais ils n'ont pas pu répondre aux exercices des plus basiques, même s'ils sont en relation avec la leçon.

Pour les remarques d'ordre général sur le déroulement de l'épreuve orale, la commission souligne les points suivants :

1. Un bon nombre de candidats a tendance à choisir des sujets d'algébre linéaire au détriment des sujets portant sur les structures d'anneaux et de corps ou sur la géométrie affine et euclidienne.

2. Certains candidats proposent un seul développement au jury. Dans le cas o ils en proposent deux, l'un des deux sujets manque de consistance. Le candidat doit savoir que ce n'est pas toujours le thème le plus intéressant qui lui sera proposé de développer.

3. En dehors de certains candidats qui ont manifesté des compétences académiques et professionnelles dignes d'un futur bon professeur agrégé, certains ont trouvé une grande difficulté pour présenter une leçon dans les normes de l'épreuve orale d'algébre et géométrie.

4. Le jury incite à porter plus d'efforts pour combler le manque remarquable dans les notions de géométrie et leurs applications.

5.2.2 Remarques de la commission de Modélisation et Calcul Scientifique

L'épreuve d'oral de modélisation est préparée par le candidat en 4 et elle dure 1. Le candidat a le choix entre un texte et une leçon. Le couplge texte/leçon est fait de sorte que le candidat ait le choix entre deux thèmes assez éloignés.

1. Le candidat a 10 mn pour présenter son plan, devant le jury, en y précisant les points qu'il propose comme développements éventuels. Il est vivement souhaitable que le candidat propose au moins deux développements. Le délai de 10 mn est en général respecté par la majorité des candidats. La grande majorité des candidats choisit le texte. Le jury a toutefois relevé que certains candidats manquent de rigueur et de clarté dans les plans qu'ils présentent. Il a aussi constaté que la tendance générale est de présenter un seul développement.

2. Une fois un développement proposé par le candidat a été choisi par le jury, le candidat a 20 mn pour l'exposer, et il a le droit de ne pas être interrompu durant les 20 mn de son exposé. Le jury a remarqué que ce délai n'est pas respecté par quelques candidats, soit parce que le développement proposé manque de consistance, auquel cas il est traité en moins de dix minutes, soit parce que le développement est mal maîtrisé par le candidat, auquel cas il y a un dépassement des 20 minutes accordées. Le Jury est amené à demander au candidat de conclure, ce qui pénalise la note réservée à ce volet.

3. Une spécificité importante de l'épreuve de modélisation est que le candidat est tenu de présenter un développement informatique en relation avec le texte ou la leçon choisi.

4. La troisième phase de l'épreuve est réservée aux discussions et interrogations des membres de la commission. Ce moment d'interaction offre au Jury l'occasion de

   (a) s'assurer de la bonne maîtrise du thème que le candidat a proposé comme développement et de discuter de son lien avec le texte, ou la leçon, choisi,

   (b) tester à quel point le candidat maitrise les concepts présentées dans son plan,

   (c) poser des questions en relation directe avec le texte ou la leçon choisi par le candidat. Ces questions concernent aussi les éventuels développements informatiques présentés par le candidat.

Pour les remarques d'ordre général sur le déroulement de l'épreuve orale de modélisation, la commission soulève les points suivants :

1. Un bon nombre de candidats ne propose aucun développement informatique et se contente de proposer un développement théorique.

2. Certains candidats proposent un seul développement au jury. Dans le cas o ils en proposent deux, l'un des deux sujets manque de consistance.

5.2.3 Remarques de la commission d'Analyse et Probabilités

L'épreuve d'analyse et Probabilités se compose d'un exposé du candidat suivi d'un entretien avec le jury. L'exposé du candidat, au cours duquel il est conduit à présenter le plan de la leçon et un développement :

I. Plan (dix minutes maximum) :

Le candidat expose une synthése, en argumentant la construction du plan, de la leçon à savoir :

1. L'intért et le positionnement de la leçon dans son environnement mathématique.

2. Le contenu de la leçon.

3. L'enchaînement des paragraphes.

4. Les résultats et les difficultés.

5. L'illustration avec des exemples pour mettre en évidence les hypothéses et les résultats.

Dans cette premiére phase de l'épreuve, le candidat est sollicité à présenter un plan cohérent et compréhensible.

II. Le développement (vingt minutes maximum) :

Le candidat devra proposer au moins deux développements et qu'il soit en mesure de les exposer en détail. Pour mener à bien le développement choisi par le jury, le candidat devra respecter le temps accordé au développement et donner des explications sur l'approche adoptée, les difficultés et l'utilisation des notions développées.

Dans cette étape de l'épreuve, le candidat devra tre capable de mettre en lumiére ses qualités pédagogiques et techniques et doit aussi faire preuve de la compréhension du sujet.

III. L'entretien avec le jury (quarante minutes maximum) :

L'entretien doit permettre au jury de :

1. Confirmer la maîtrise du candidat du plan présenté et des outils de bases utilisés dans le développement.

2. Vérifier la capacité du candidat à faire preuve de réflexion dans des situations parfois inattendues.

3. Constater que le candidat a acquis un certain recul. Résultat naturel d'un travail de préparation approfondi au concours d'agrégation.

Dans cette derniére étape de l'épreuve, le candidat doit donc se préparer à des questions sur tout énoncé mis dans son plan ainsi qu' à des questions sur des applications de son développement. Questions auxquelles il doit répondre avec précision. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier du résultat général présenté dans son développement. Pour cela il doit mettre en oeuvre des énoncés sur des situations simples et aussi réfléchir à des exemples ou des contre-exemples lors de sa préparation.

Dans son évaluation, le jury a noté les remarques suivantes :

1. Une progression constatée du niveau des candidats.
2. Plusieurs candidats se sont contentés de réciter d'une maniére linéaire leurs plans.
3. Des réponses non précises furent formulées à des questions élémentaires.
4. Des notions de bases à titre d'exemple, la dérivation sous le signe somme et en général de la dérivation de fonctions composées, sont un peu ou mal maîtrisées. Certains candidats manipulent des objets mathématiques dont ils ignorent les définitions. En résumé le programme de la licence n'est pas bien assimilé par certains candidats.

En conclusion, il est souhaitable que le candidat connaisse le programme du concours d'agrégation et non se cantonner au programme de la deuxiéme année post-bac.

Chapitre 6

Listes des leçons

Les listes des leçons sont données à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation des leçons figurant sur les listes. Une grande partie de ces leçons seront reprises pour la session 2020, des modifications et des évolutions sont possibles. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Sous-groupes distingués et de groupes quotients. Exemples et applications.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
7. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
8. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
9. Représentations de groupes finis de petit cardinal.
10. Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de fourier discrète. Applications.
11. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Anneaux principaux. Applications.
14. Corps finis. Applications.

15. Anneau des séries formelles. Applications.
16. Extensions de corps. Exemples et applications.
17. Exemples d'équations diophantiennes.
18. Droite projective et birapport.
19. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
20. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
21. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
22. Résultant. Applications.
23. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
24. Actions de groupes sur les espaces de matrices. Exemples et applications.
25. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.
26. Déterminant. Exemples et applications.
27. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
28. Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
29. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
30. Exponentielle de matrices. Applications.
31. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
32. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
33. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
34. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
35. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.
36. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
37. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
38. Coniques. Applications.

39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies
41. Utilisation des groupes en géométrie.
42. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
43. Etude métrique des courbes planes ou gauches.
44. Groupes abéliens finis.
45. Sous-groupes finis de $O^+(2)$ et $O^+(3)$.
46. Matrices équivalentes et semblables.
47. Résolution d'un système d'équations linéaires. Algorithmes et complexité.
48. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Applications.
49. Groupes quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.
50. Espaces vectoriels quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.

6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.
7. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
8. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
9. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
10. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonometriques. Exemples et applications.
11. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
12. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications
13. Étude métrique des courbes. Exemples.

14. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples
15. Applications des formules de TAYLOR.
16. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
17. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.
18. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
19. Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.
20. Convergence des suites numériques. Exemples et applications des suites numériques.
21. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
22. Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
23. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
24. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
25. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
26. Fonctions à variations bornées et mésure de Stieljes, Exemples et applications.
27. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
28. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
29. Espaces L^p ,$1 \leq p \leq +\infty$.
30. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
31. Illustrer, par des exemples, quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
32. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
33. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
34. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
35. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
36. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
37. Séries de FOURIER. Exemples et applications.

38. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

39. Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

40. Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

41. Vecteurs aléatoires et indépendance.

42. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

43. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

44. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.

45. Fonctions de répartitions. Proriétés et applications.

46. Fonctions caractéristiques. Proriétés et applications.

47. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples

48. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires (convergence en loi, convergence en probabilité et convergence presque sûr).

49. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

50. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

51. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

52. Espaces de SCHWARTZS ($\mathbb{R}^d$) et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S^0(\mathbb{R}^d)$.

53. Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

6.3 Liste des leçons de modélisation et calcul scientifique

1. Calcul numérique : intégration, différentiation, sommation, résolution d'équations algébriques ou différentielles.

2. Méthodes numériques pour les systèmes linéaires : conditionnement, factorisation LU, méthode du gradient pour systèmes d'équations linéaires symétriques définis positifs. Recherche de valeurs propres (méthode de la puissance). Moindres carrés linéaires sans contraintes.

3. Résolution de systèmes d'équations non linéaires : Méthode de Newton, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.

4. Equations différentielles ordinaires : Méthodes d'Euler explicite et implicite. Consistance, stabilité, convergence, ordre.

5. Probabilités : lois de variables aléatoires discrètes et à densité. Méthodes de simulation de variables aléatoires de lois données, en particulier pour les lois classiques : binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, gaussienne, gamma.

6. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini : irréductibilité, apériodicité, classification des états, théorème de Perron-Frobenius, convergence.

7. Calcul matriciel : opérations élémentaires sur lignes et sur colonnes, méthode du pivot de Gauss.

8. Polynmes à une indéterminée : évaluation (Horner), interpolation (Lagrange), localisation des racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Chapitre 7

Textes de l'épreuve de modélisation

L'oral du concours de l'Agrégation Marocaine de Mathématique comporte trois épreuves, l'une portant principalement sur les domaines Algèbre-Géométrie, la deuxième principalement sur les domaines Analyse-Probabilités, la troisième sur les problèmes de Modélisation Mathématique. Cette dernière épreuve s'appuie sur des connaissances générales d'Algèbre-Géométrie-Analyse-Probabilités mais elle diffère fondamentalement des deux premières :

- par les objectifs : il s'agit d'étudier des situations concrètes, de réfléchir aux diverses possibilités de traduire mathématiquement une telle situation et de proposer des solutions adaptées

- par la forme de l'épreuve : le candidat tire un sujet contenant un texte scientifique (avec des pistes de réflexion) et un intitulé de leçon de calcul scientifique ou formel (orienté vers la modélisation). Il choisit le texte ou la leçon et dispose de quatre heures pour préparer son passage devant le jury.

- par les outils mis à sa disposition pendant les quatre heures de préparation : le candidat travaille à l'aide des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres livres s'ils sont autorisés par le jury. Il dispose aussi d'un ordinateur équipé de divers logiciels mathématiques.

À l'issue de sa préparation, le candidat présente les fruits de sa réflexion au jury, pendant environ une heure et quart. On attend de lui qu'il

1. présente la modèlisation mis en oeuvre dans le texte ou la leçon, ce qu'il en a compris

2. détaille certains résultats mathématiques utiles pour le sujet étudié

3. discute les hypothèses introduites par le texte ou les hypothèses choisies pour la leçon

4. montre l'exploitation possible du sujet dans une séquence pédagogique (on peut penser aux TIPE des classes préparatoires, aux travaux personnels des classes terminales de lycées)

5. présente un ou plusieurs programmes informatiques qui sont utiles dans la résolution de problèmes introduits par le sujet et qui illustrent les résultats obtenus

Lors des vingt dernières minutes de l'interrogation orale, le jury pose des questions diverses en relation avec le sujet. Il peut revenir sur des points peu clairs de la présentation ou proposer d'autres approches de la situation étudiée, d'autres pistes de travail.

Lors des oraux de Modélisation Mathématique 2016 le jury a noté que

- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral
- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique
- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80.
- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mail assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à coté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme $m_{i,j}$ correspond à la zone rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$, est subdivisée en petits rectangles

$$\left[a + \frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1/2)(b-a)}{n}\right] \times \left[c + \frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c + \frac{(j+1/2)(d-c)}{p}\right].$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers (i, j). Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier, $[[0, 255]]$ par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple

(RGB= red, green, blue).

7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice M carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de [[0,255]]. Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne $R = (n_0, \cdots, n_{255})$ où n_k est le nombre de pixels d'intensité k (i.e. de termes de M valant k). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.
Cette répartiton donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des (i, j) où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note $I(M)$ la quantité d'information portée par une image M. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec M carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à [[0,255]], $I(M)$ est de l'ordre de $512^2 \times 8$ (les termes $m_{i,j}$ sont écrits en base 2), approximativement $\boxed{2{,}36\ 10^6}$.
Comprimer une image M consiste à la remplacer par une autre image M' proche de M - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur, $I(M') << I(M)$.
Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle A de taille n, p, il existe des matrices orthogonales U, V_t et une matrice D de taille n, p telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où $q = \min(n, p)$. L'extension aux matrices complexes est valide, avec U, V unitaires et D respectant (7.1.1). Les $d_{i,i}$ sont analogues à des niveaux d'énergie, corresondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les k derniers sont 0 cela signifie que le rang de A est $q - k$.

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de$d_{i,i}$ nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple $s = d_{1,1}/100$, on considère alors que la matrice $M' = UD'V_t$ où D' est obtenue en remplaçant dans D les $d_{i,i}$ infériurs au seuil par 0 donne une image proche de M. Il est clair que $I(M')$ est inférieur à $I(M$, voire très inférieur. Par exemple si M est d'ordre

512 et si la moitié des $d_{i,i}$ est négligée on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à $4\times256^2+256 =$ environ $\boxed{2{,}62\ 10^5}$, soit un gain de facteur 10 environ.

7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_n$ et $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_p$.
On notera $(E_i)_{1\le i\le p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1\le j\le n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. On écrit $0_{n,p}$ pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}A$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} A$ désigne est le noyau de A, $\operatorname{Im} A$ l'image de A. Le noyau de A est $\{\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \,\}$, noté $\operatorname{Ker} A$, l'image de A est $\{\, AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \,\}$, notée $\operatorname{Im} A$. On note $F^\perp$ l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
I.1. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.
I.2. Montrer que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.
I.1.a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X\,|\,Y\rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.
b) Si W est un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\|AW\|_n^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.
c) En déduire que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont réelles, positives ou nulles.
I.4.a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.
c) En déduire également que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont même rang.
I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$.

I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \dots, p\}$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \dots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \dots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \dots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A^{\mathrm{t}}A$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A^{\mathrm{t}}A$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{\, r+1, \dots, p \,\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{\, r+1, \dots, n \,\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A^{\mathrm{t}}A$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j}$ l'élément de la $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ ligne, $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^{\mathrm{t}}UAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\}, \ ({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta^{\mathrm{t}}V$.
La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9.a) Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i {}^{\mathrm{t}}E_i$.

b) En déduire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i {}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}AA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i {}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad A^{\mathrm{t}}A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^{\mathrm{t}}U_i$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker} {}^{t}AA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^{t}A = \operatorname{Ker} {}^{t}A$.

Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta{}^{t}V$, on appelle Δ^{+} la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tpus les éléments $\Delta^{+}_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^{+}_{11}, \Delta^{+}_{22}, \ldots, \Delta^{+}_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \ldots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^{+} = V(\Delta^{+}){}^{t}U$.
Δ^{+} (resp. A^{+}) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^{+} ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^{+} est uniquement déterminée à partir de A.*

1. Déterminer les matrices A_0^{+}, $A_0A_0^{+}$, $A_0^{+}A_0$, $A_0A_0^{+}A_0$ et $A_0^{+}A_0A_0^{+}$.

2. Déterminer $(A_0^{+})^{+}$.

3. Évaluer $\Delta^{+}\Delta$ et $\Delta\Delta^{+}$.

4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^{+} = A^{-1}$.

7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématique

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ...) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :
En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de tavailler sur les images numériques.
On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomdimage.jpg. L'instruction M=imread('nomdimage.jpg') fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande M1=double(M) // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur $M1$. Pour visualiser la matrice $M2$ finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.

7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner une preuve de l'unicité de A^+, matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de A. Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.

- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.

- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.

- Que donne la SVD de A si A est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Quel est l'intért de modèles numériques pour les images?

- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.

- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.

- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image I en une image I' pratiquement similaire à I mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.

- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).

- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conduteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.
Les hypothèses raisonnables du modèle sont
- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point M intérieur au solide la température en M est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en M (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :
Soit G un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, ∂G sa frontière et soit φ une fonction continue de ∂G dans $\mathbb{R}$. Chercher une fonction continue f de $\overline{G}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(a) $\forall x \in G, \quad \forall r \in]0, dist(x, \partial G)[, \quad f(x) = \displaystyle\int_{|y|\leq r} f(x+y)dy$
(b) $\forall x \in \partial G, \quad f(x) = \varphi(x)$

Une solution de ce problème est nécessairement régilière et vérifie une EDP o intervient le laplacien de f, $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \partial^2_{k,k} f$, on peut énoncer :

Theorem 7.2.1 *Une fonction f est solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord h si et seulement si elle est de classe C^2 sur G, continue sur $\overline{G}$, vérifie la condition au bord (b) et l'EDP (c) $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in G$.*

On connait des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine G et sa frontière, l'existence ou l'unicité de f, solution du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (c) \\ (b) \end{array} \right.$. Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier o existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant

Theorem 7.2.2 *Le problème de Dirichlet sur la boule $B(0,r)$ avec condition au bord φ est donnée par*

$$f(x) = \int_{\partial[B(0,r)]} \varphi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz)$$

o m_r est la mesure uniforme sur la sphère $S(0,r) = \partial[B(0,r)]$ de masse μ_r choisie pour avoir $\displaystyle\int_{\partial[B(0,r)]} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz) = 1$.

La valeur de la solution en x est une moyenne des valeurs de h relativement à une probabilité dépendant de x portée par la sphère $S(0,r)$. La fonction densité $z \mapsto \dfrac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d}$ est appelée noyau de Poisson.

Dans le cas d'un domaine G non borné il faut des conditions supplémentaires pour obtenir existence ou unicité d'une solution. Un cas simple à traiter est celui de $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ pour lequel la solution est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \frac{x_2}{(x_1 - z)^2 + x_2^2} dz$$

La probabilité portée par la frontière de G est ici la loi de Cauchy translatée en x.

7.2.2 Méthodes numériques de résolution

Déterministe

On discrétise l'espace, notant $h > 0$ le pas de discrétisation, notant $\sim_h$ la relation de voisinage :

$$\forall (x, y) \in h\mathbb{Z}^d, \quad x \sim_h y \Leftrightarrow \|y - x\| = h$$

posant $G_h = G \cap h\mathbb{Z}^d$ et $\partial_h G = \{x \in h\mathbb{Z}^d \setminus G_h, \quad \exists y \in G_h, \ x \sim_h y\}$.
Le laplacien discret est donné par $\Delta_h f(x) = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_{y \sim_h x} f(y) - f(x)$.
Remarquer que $\Delta_h f(x) = 0$ équivaut à $f(x) =$ moyenne uniforme de f sur le voisinage de x, ce qui confirme le lien entre les propriétés (a) et (b) du paragraphe précédent.
Le problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ est remplacé par sa version discrète :
chercher f_h définie sur $G_h \cup \partial_h G$ telle que $\begin{cases} (1) \forall x \in G_h, \quad \Delta_h(f)(x) = 0 \\ (2) \forall x \in \partial_h G, \ f(x) = \varphi_h(x) \end{cases}$
avec $\varphi_h(x) =$ valeur moyenne de φ sur $\partial_h G \cap [x - h, x + h]^d$.
Il s'agit maintenant de résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues, $n = card(G_h)$. On dispose pour ce faire de diverses méthodes numériques. On essaye en général de tirer profit de la remarque suivante : la matrice $n \times n$ du système linéaire est une matrice-bande, propriété qui est conséquence du caractère local de l'opérateur différentiel laplacien.
La méthode de discrétisation est intéressante parce qu'on dispose d'un résultat de convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème initial, lorsque h tend vers 0^+.

Stochastique

On utilise ici le processus W, mouvement brownien $d-$ dimesionnel, dont le générateur infinitésimal est, au facteur -1/2 près, le laplacien. On montre en utilisant la formule d'Ito que la solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ est donnée par

$$(3) \qquad f(x) = \mathbb{E}(\varphi(X(\tau_G)))$$

o $X(t) = x + W(t)$ et $\tau_G = \min\{t \geq 0, \quad X(t) \in \partial G\}$ (le temps d'atteinte de la frontière ∂G.
Ici aussi on utilise couramment des méthodes de calcul numériques en partant d'une discrétisation de l'espace et en remplaçant le mouvement brownien par une marche aléatoire. Pour définir la marche aléatoire X_h partant de $x \in G_h$ (qui remplace le processus $X(t) = x + W(t)$ évoqué plus haut)

- on considère $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante et équidistribuée de vecteurs aléatoires telle que

$$\forall(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)\in\{-1,+1\}^d,\quad \mathbb{P}(Y_j=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)=\frac{1}{2d}$$

- on pose, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $X_h(k)=x+\sum_{j=1}^{k}Y_j$.

C'est la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins.
La fonction $x\mapsto\mathbb{E}(\varphi(X_h(\tau_{G_h})))$ o $\tau_{G_h}=\min\{k\geq 0,\quad X(t)\in\partial G_h\}$ est une solution approchée du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ, elle converge vers la solution f donnée par (3) lorsque h tend vers 0^+.
Pour calculer cette solution approchée numériquement on utilise la loi des grands nombres, en répétant la simulation de marches aléatoires un grand nombre de fois (méthode de Monte Carlo). Noter que le nombre de variables indépendantes Y_j qu'il est nécessaire de simuler est toujours fini, puisqu'on arrte la marche aléatoire X_h dès qu'elle atteint la frontière de G. Ceci permet d'obtenir des solutions approchées en temps raisonnable.

7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|.\|_2$.
- $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
- On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $u\ :\ \Omega\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur louvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l' application $\Delta u=\partial_{1,1}u+\partial_{2,2}u$.
- Une application $v\ :\ \Omega\to R$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω avec $\Delta v(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.
- Pour $(x,y)\in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z=x+iy$ et on pose pour t réel

$$N(x,y,t)=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}=\frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos(t))^2+(y-\sin(t))^2}\qquad\text{(quand l'expression a un sens)}$$

Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f:C(0,1)\to\mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$. Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$. On définit en outre l'application

$$N_f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(x,y,t)f(\cos(t),\sin(t))\,dt$$

sur $D(0,1)$ et l'application $u(x,y) = \begin{cases} N_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$ sur $\bar{D}(0,1)$.

1. a. Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{1,1} N_f$ dordre 2 par rapport à x.
   De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles dordre 2 par rapport a toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite. Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{i,j} N_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{i,j} N(x,y,t)$.

   b. En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

2. On fixe $t_0 \in [0, 2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] / \ \|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

   a. Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

   b. Montrer l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   c. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x,y,t)| \leq 4 \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

   d. En déduire que, pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Conclusion?

4. (résumée) Montrer que si f est nulle sur $C(0,1)$ alors u est nulle sur $D(0,1)$. Conclusion?

7.2.4 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

On peut s'intéresser à la démonstration des résultats théoriques présentés.
Pour les résultats d'existence / unicité on peut s'inspirer du sujet de concours inclus dans ce texte.

Pour l'utilisation de processus X comme le mouvement brownien (en temps continu) ou la marche aléatoire symétrique (en temps discret) on peut relier la propriété $(f(X_t))_t$ est une martingale et la propriété f harmonique.
La méthode numérique probabiliste s'appuie sur le temps d'atteinte de la frontière du domaine G. Il est sous entendu dans le texte qu'il est bien défini et à valeurs finies, presque srement. Comment prouver ces assertions?
Pour le résultat d'unicité de la solution du problème de Dirichlet ou pour l'étude des fonctions harmoniques, une méthode bien connue exploite le principe du maximum. Rappeler l'énoncé de ce principe et montrer comment il peut tre utilisé.

Aspect modélisation calcul numérique et algorithmique

Commenter les hypothèses du modèle. Quel modèle, quelles équations peut on proposer dans le cas o le solide possède des sources de chaleur internes?
La méthode numérique déterministe s'appuie sur la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles. Quels sont algorithmes peuvent tre efficaces pour cet objectif et comment exploiter la propriété de la matrice des coefficients qui est une matrice bande?
Illustrer sur des exemples la rapidité de convergence de méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas de matrices bandes.
Simuler la marche aléatoire symétrique au plus proche voisin. On peut commencer par le cas de la dimension 1, i.e. le jeu de pile-face.
Utiliser cette simulation pour observer le temps d'atteinte fini de la frontière. Et aussi pour fournir une solution approchée du problème de Dirichlet.

7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock

Une entreprise qui vend un certain produit voudrait décider combien d'articles du produit devrait avoir en stock pour chacun des n prochains mois. Les intervalles de temps entre les instants de deux demandes successives sont des quantités positives, aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités supposée exponentielle de moyenne $\lambda = 0.1$ mois. Les demandes sont des quantités aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On suppose que cette loi, notée $(d(k))_{k\in E}$, est donnée par $d(1) = d(4) = 1/6 \quad \text{et} \quad d(2) = d(3) = 1/3$. Au début de chaque mois, l'entreprise vérifie le niveau I de son stock du produit et décide combien d'articles à commander auprès de son fournisseur. Si l'entreprise commande Z articles, elle encourt un coût $C = K + iZ$, où $K = 32\$$ est le coût d'installation et $i = 3\$$ est le coût incrémental par article commandé (si $Z = 0$, aucun coût n'est encouru). Quand une commande est formulée, le

temps nécessaire pour qu'elle arrive à l'entreprise (temps de livraison) est uniformément distribué entre 0.5 et 1 mois.
L'entreprise adopte une stratérie, notée (s, S), pour alimenter son stock et décide une commande Z selon le schéma suivant:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{si} \quad I < s \\ 0 & \text{si} \quad I \geq s \end{cases}$$

où $(s, S) \in I\!N \times I\!N^*$ avec $s < S$.
Lorsqu'une demande D est formulée par un client, elle est immédiatement satisfaite si le niveau du stock I est supérieur ou égal à D (i.e. $I \geq D$). Si la demande D excède le niveau du stock I (i.e. $I < D$), l'excès $\Delta = D - I$ est mis en arriérée (en déficite) et sera satisfait par les livraisons futures. Dans le cas où $\Delta > 0$, le niveau du stock I devient théoriquement négatif ($I = -\Delta$). Lorsqu'une livraison est arrivée, elle est d'abord utilisée pour absorber les arriérées et ensuite, s'il en reste, elle alimente le stock.
Soit $I(t)$ le niveau du stock à l'instant t. Notons $I^+(t)$ et $I^-(t)$ les quantités $\max(I(t), 0)$ et $= \max(-I(t), 0)$ respectivement. Pour une période de n mois ($n \in I\!N^*$), considérons les quantités $A^+(n)$ et $A^-(n)$ définies par

$$A^+(n) = \frac{1}{n} \int_0^n I^+(t)dt \qquad \text{et} \qquad A^-(n) = \frac{1}{n} \int_0^n I^-(t)dt.$$

Supposons que l'entreprise encourt deux autres coûts: un coût de maintien noté m et un coût de l'arriérée noté a. Le coût $m = 1\$$, par article par mois, inclut la location du magasin (entrepot), l'assurance, la maintenance, etc. et le coût des arriérées, quand elles existent, $a = 5\$$ par article manquant par mois.

7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock

Supposons qu'à l'instant 0, aucune demande n'est formulée et que $I(0) = 60$.
On simule le comportement du stock pour $n = 120$ mois et on compare le coût total moyen par mois CTM (somme des différents coûts moyens par mois) pour chacune des 9 stratégies de stockage données dans la table (**Table 1.**) suivante:

s	20	20	20	20	40	40	40	60	60
S	40	60	80	100	60	80	100	80	100

Table 1. Différentes stratégies (s, S)

7.3.3 Quelques outils probabilistes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

Définition

La densité de probabilité f d'une variable aléatoire réelle X qui obéit à une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ (notation: $X \sim Exp(\alpha)$) est définie par

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x), \quad x \in I\!R,$$

où la notation $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.
La fonction de répartition de cette loi exponentielle est donnée par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. La variable aléatoire réelle Y définie par $Y = F(X)$ obéit à une loi de probabilité uniforme sur $]0,1[$.

Inverse généralisé de F

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. La fonction inverse généralisée F^- de F est définie par:

$$F^-(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq u\}, \quad u \in]0,1[$$

Remarque

Si F est inversible, alors $F^- = F^{-1}$.

Exemples

1)– Pour une variable aléatoire exponentielle $X \sim Exp(\alpha)$, nous avons

$$F^-(u) = F^{-1}(u) = \frac{-ln(1-u)}{\alpha}, \qquad u \in]0,1[\tag{7.3.2}$$

2)– Pour une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, nous avons, pour une réalisation uniforme $u \in]0,1[$,

$$(2) \begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{alors} \quad F^-(u) = x_1 \\ \text{Sinon } F^-(u) = x_k & \text{telle que} \quad \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \end{cases}$$

7.3.4 Outils informatiques

La simulation Monte Carlo, d'un modèle aléatoire, utilise une suite u_k, $k = 1, 2, \cdots$, de réalisations de la loi uniforme sur $]0,1[$. On **admet** qu'une telle suite peut être produite par une machine informatique par le biais d'une fonction dite générateur de nombres aléatoires. Par exemple, en langage C, l'appel de la fonction $rand()$ donne un nombre entier entre 1 et une grande constante entière positive $RAND\_MAX$, d'où la division $u = (float)rand()/RAND\_MAX$ donne un réel $u \in]0,1[$ que l'on prend comme une réalisation de la loi uniforme sur $]0,1[$. Généralement les langages informatiques dédiés au calcul scientifique sont dotés de générateurs de nombres aléatoires.

7.3.5 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

1)− Proposer une preuve pour le théorème donné dans le paragraphe
"Quelques outils probabilistes".

2)− Déterminer le lien entre le paramètre λ défini dans la section I et le paramètre α défini dans la section III.

3)− Soit $t > 0$. Exprimer $I^+(t)$ en fonction des instants $t_k \in [0, t]$ et des demandes D_k formulées aux instants t_k.

4)− Que modélisent les quantités suivantes (quand elles existent):

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A^+(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} A^-(n).$$

5)− Expliciter la loi de probabilités du temps de livraison et discuter l'importance du support de cette loi.

Aspect enseignement

1)− Proposer d'autres types de coût et montrer comment peut-on les inclure dans le modèle proposé.

2)− Peut-on spécifier la loi de la demande en proposant par exemple une loi binômiale ou une loi de Poisson. Qu'est ce qu'on doit préciser dans le texte concernant chacune de ces deux lois proposées. Peut-on proposer une loi normale pour la demande?

3)− Discuter la possibilité de passer la commandea à tout instant voulu, au lieu que ça soit uniquement au début de chaque mois.

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

1)− Peut-on construire théoriquement une suite de nombres aléatoires ? (donner des ingrédients justifiant votre réponse).

2)− Proposer un procédé mathématique qui peut jouer le rôle d'un générateur de nombres aléatoires.

3)− Comment peut-on vérifier que l'algorithme suivant permet de générer une réalisation

x de X dont la fonction de répartition est F:

Etape 1: générer u uniforme dans $]0,1[$ (par un générateur de nombres aléatoires)
Etape 2: prendre $x = F^{-}(u)$

4)− Pour une stratégie $(s, S) = (30, 90)$, proposer une réalisation possible de $I(t)$, durant les 3 premiers mois, pendant laquelle figurent des arriérées en traçant les courbes de $I(t)$, $I^{+}(t)$ et $I^{-}(t)$.

5)− Interpréter les quantités $mA^{+}(n)$ et $aA^{-}(n)$.

6)− Comment réalise-t-on l'indépendance entre deux variables aléatoires dans un programme informatique.

7)− Justifier le fait qu'on peut remplaçer $ln(1-u)$ par $ln(u)$ dans la formule (7.3.2).

8) Ecrire un algorithme détaillé et clair qui permet de simuler le modèle aléatoire utilisé pour la gestion du stock de l'entreprise puis le traduire dans un langage de programmation (en C par exemple) que vous exécutez sur machine. L'algorithme doit aboutir à la comparaison des 9 stratégies proposées dans le tableau des données (**Table 1.**) en calculant toutes les quantités utiles à cette comparaison.
Vous présenter les résultats de l'execution dans des tableaux et/ou sous formes graphiques (les graphiques sont plus sollicités). Commentez les résultats obtenus.

Chapitre 8

Programme du concours de l'agrégation - Session 2019

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser et savoir illustrer. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement suivant différents points de vue. Le programme évoque parfois des exemples; ceux-ci sont donnés à titre purement indicatif et peuvent être remplacés par d'autres qui seraient également pertinents.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés K en général) sont supposés commutatifs.

8.1 Algèbre linéaire

8.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

2. Sous-espacess tables d'unendomorphisme. Valeurs propres,vecteurs propres,sous-espaces propres.

3. Représentations linéaires d'un groupe. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

8.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec K^n. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité.
   Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.
   Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique. Poly- nômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley- Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

8.2 Groupes

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants pourront être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension 2 et 3.

2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

8.3 Groupes Anneaux, corps et polynômes

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Pro- duit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Notion d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.

2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Décomposition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

3. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

4. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau Z et de l'algèbre $K[X]$ des polynômes sur le corps K. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $Q[X]$, critère d'Eisenstein.

5. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles, fonction indicatrice d'Euler. Théorème chinois.

6. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Exten- sions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis. Morphisme de Frobenius.

7. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

8.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadra- tiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments or- thogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Procédés d'orthogonalisation.

3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.

4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symé- triques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition po- laire dans $GL(n, \mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2, classification des éléments de $O(2, \mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, classification des éléments de $O(3, \mathbb{R})$; produit mixte, produit vectoriel.

5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décom- position polaire dans $GL(n, \mathbb{C})$.

8.5 Géométrie affine et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous- espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, en- veloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

2. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Dé- placements, antidéplacements. Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.

3. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites, Théorème de l'angle inscrit, cocy- clicité.

4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

5. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

8.6 Analyse à une variable réelle

8.6.1 Nombres réels

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbb{R}$. Parties connexes de $\mathbb{R}$.

8.6.2 Séries numériques

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

8.6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles

1. Continuité
   Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la conti- nuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

2. Dérivabilité
   Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Etude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

8.6.4 Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonc- tions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

8.6.5 Intégration

1. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.

2. Intégrales généralisées Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi- convergentes.

8.6.6 Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

8.6.7 Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractéri- sations de la convexité. Inégalités de convexité.

8.7 Analyse à une variable complexe

8.7.1 Séries entières

1. Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

2. Exponentielle complexe; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

8.7.2 Fonctions d'une variable complexe

1. Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

2. Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.

3. Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

4. Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

5. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

8.8 Topologie

8.8.1 Topologie et espaces métriques

1. Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

2. Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

3. Compacité.Équivalencedesdéfinitionsentermesdevaleursd'adhérence(Bolzano-Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel-Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

4. Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.

5. Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

8.8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\dot{}\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

2. Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

3. Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de Banach.

4. Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

8.8.3 Espaces de Hilbert

1. Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

2. Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces l^2 et L^2. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux. Théorème de Lax-Milgram. (

3. Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1.

8.9 Calcul différentiel

8.9.1 Fonctions différentiables

1. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

2. Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient, matrice hessienne. Composition d'ap- plications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe C^1.

3. Applications de classe C^k. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral.

4. Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Recherche des extrema locaux, caractérisation de la convexité des fonctions de classe C^1 et C^2 définies sur un ouvert convexe $\mathbb{R}^n$.

5. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

8.9.2 Équations différentielles

1. Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $I \times \Omega$ avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Gronwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème des bouts).

2. Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).

3. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (fomule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

8.9.3 Géométrie différentielle

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de $\mathbb{R}^3$, position par rapport au plan tangent.

2. Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Etude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc C^1.

3. Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

8.10 Calcul intégral

8.10.1 Notions de théorie de la mesure

Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Défini- tion des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

8.10.2 Intégration

1. Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.

2. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabi- lité des intégrales à paramètres.

3. Espaces L^p, où $1p\infty$. Complétude. Inégalité de Holder.

4. Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.

5. Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

8.10.3 Analyse de Fourier

1. Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejer et de Parseval.

2. Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Théorème de Plancherel.

8.11 Probabilités

8.11.1 Définition d'un espace probabilisé

Evénements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

8.11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

1. Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

2. Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

8.11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

1. Convergence en probabilité, dans L^p, presque surement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.

2. Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

8.12 Distributions

8.12.1 Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

1. Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide. Transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $S(\mathbb{R}^d)$. Multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente.

2. Espace $S'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées. Dérivation des distributions tempérées. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $S(\mathbb{R}^d)$). Multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente. Exemples de distributions tempérées : fonctions localement intégrables, masse de Dirac, valeur principale de Cauchy, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac.

3. Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$. Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

8.12.2 Applications

Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un). Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien). Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes. Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension 1.

8.13 Méthodes numériques

8.13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition LU. Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel); analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral.
Décomposition en valeurs singulières.
Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien $1D$.

8.13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vecto- rielles

Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puis- sance. Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés. Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

8.13.3 Intégration numérique

Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

8.13.4 Approximation de fonctions numériques

Interpolation de Lagrange : polynôme de Lagrange d'une fonction en $(n + 1)$ points, estimation de l'erreur. 13.5 Équations différentielles ordinaires Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

8.13.5 Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini. Transformée de Fourier rapide.

Chapitre 9

Anexe : Sujets du concours

9.1 Composition de mathématiques générales

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EAE MAT 1

SESSION 2019

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	101	0376

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Définitions et rappels

— Soit A un anneau commutatif unitaire intègre dont on note 1_A l'élément unité.

— On rappelle que $u \in A$ est *inversible* s'il existe $u' \in A$ tel que $uu' = 1_A$. On note $A^\times$ l'ensemble des inversibles de A, qui est un groupe multiplicatif.

— Un élément x de A est dit *irréductible* si x n'est pas inversible et si pour tous $\alpha, \beta \in A$, $x = \alpha\beta$ implique $\alpha \in A^\times$ ou $\beta \in A^\times$.

— Deux éléments $x, y \in A$ sont dits *associés* s'il existe $u \in A^\times$ tel que $x = uy$. On note alors $x \sim y$.

— Soit I un idéal de A ; on dit que deux éléments $\alpha, \beta \in A$ sont *congrus modulo* I si $\alpha - \beta \in I$. On écrit alors $\alpha = \beta \pmod I$.

— Pour $x \in A$, on note $\langle x \rangle = xA$ l'idéal engendré par x. Un tel idéal est dit *principal*.

— Soient I, J deux idéaux de A. On dit que I *divise* J si $J \subseteq I$. Par ailleurs, on note IJ l'idéal produit de I et J, qui est l'ensemble des sommes finies $\sum_i x_i y_i$ avec $x_i \in I$ et $y_i \in J$.

— On rappelle qu'un nombre complexe α est dit *algébrique* (sur $\mathbf{Q}$) s'il existe un polynôme non nul P de $\mathbf{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Il existe alors un polynôme unitaire de plus petit degré annulant α, que l'on appelle *polynôme minimal* de α et que l'on note π_α. Les racines complexes de ce polynôme sont appelées les *conjugués* de α.

— On appelle *entier algébrique* tout nombre complexe qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

— On rappelle une version du lemme de Gauss, que l'on pourra utiliser librement : soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $P = P_1 P_2$ avec P_1 et P_2 des polynômes de $\mathbf{Q}[X]$. Alors il existe un rationnel $r \in \mathbf{Q}$, non-nul, tel que $rP_1 \in \mathbf{Z}[X]$ et $\frac{1}{r}P_2 \in \mathbf{Z}[X]$.

— On dit qu'un groupe abélien G est de *type fini* s'il existe une famille génératrice finie de G, c'est-à-dire un entier r et une famille $(a_1, \ldots, a_r)$ d'éléments de G tels que tout élément de G s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des $a_1, \ldots, a_r$.

Notations

— Pour un anneau A commutatif et un entier naturel non nul n, on note $\mathcal{M}_n(A)$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans A ; la matrice unité est notée I_n.
Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(A)$, on note χ_M son polynôme caractéristique, qui est le polynôme

unitaire défini par $\chi_M = \det(XI_n - M)$ et on note π_M son polynôme minimal.

— Pour un nombre premier p, on note $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

— Pour tout entier algébrique α, on note $\mathbf{Z}[\alpha]$ l'anneau des éléments de la forme $P(\alpha)$ où P parcourt $\mathbf{Z}[X]$.

Dans le problème, les textes placés entre les symboles ☛ ... ☚ précisent des notations et définitions qui sont utilisées dans la suite de l'énoncé.

I Exercices préliminaires

1. Soit $B \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme unitaire et $A \in \mathbf{Z}[X]$. Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbf{Z}[X]$ tels que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$ ou $R = 0$.

   Indication : On pourra faire une preuve par récurrence sur le degré de A.

2. **L'anneau $\mathbf{Z}[j]$**. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Démontrer que j est un élément algébrique sur $\mathbf{Q}$ et préciser son polynôme minimal.
   (b) Démontrer que $\mathbf{Z}[j] = \{a + bj,\ (a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$.

   Pour tout nombre complexe z, on pose $\mathrm{N}(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

   (c) Démontrer que pour tout $z \in \mathbf{Z}[j]$, on a $\mathrm{N}(z) \in \mathbf{N}$. En déduire que si $z \in \mathbf{Z}[j]$ est inversible, alors $N(z) = 1$, puis que $\mathbf{Z}[j]^\times$ possède 6 éléments que l'on précisera.
   (d) Soient $x \in \mathbf{Z}[j]$ et $y \in \mathbf{Z}[j] \setminus \{0\}$. Déterminer un élément $q \in \mathbf{Z}[j]$ tel que $\mathrm{N}\left(\frac{x}{y} - q\right) < 1$. En déduire que l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est euclidien.

3. **Polynômes cyclotomiques**. Soit n un entier naturel non nul. On note Φ_n le n-ième polynôme cyclotomique. On rappelle que si μ_n^* désigne l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$, ce polynôme est défini par

$$\Phi_n(X) = \prod_{\mu \in \mu_n^*} (X - \mu).$$

   (a) Démontrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.
   (b) En déduire que $\Phi_n(X) \in \mathbf{Z}[X]$.
   (c) Soit p un nombre premier. On note $\pi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{F}_p$ la surjection canonique. Le morphisme d'anneaux π s'étend, coefficient par coefficient, en un morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ sur $\mathbf{F}_p[X]$, noté $\widehat{\pi}$ (on ne demande pas de justifier ce point). Si Φ_p désigne le p-ième polynôme cyclotomique, on rappelle que $\Phi_p = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$.
      i. Démontrer que $\widehat{\pi}(X^p - 1) = (X - 1_{\mathbf{F}_p})^p$.
      ii. Soient P et Q deux polynômes unitaires et non constants dans $\mathbf{Z}[X]$ tels que $X^p - 1 = PQ$. Démontrer que $P(1)$ et $Q(1)$ sont des entiers multiples de p.
      iii. Retrouver ainsi que Φ_p est un polynôme irréductible de $\mathbf{Q}[X]$.

      ☛*De manière générale, Φ_n est irréductible pour tout $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$, résultat que l'on admet ici et que l'on pourra utiliser librement dans la suite.* ☚

      iv. Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Déterminer le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$ et en déduire le degré de l'extension de corps $\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}$.

4. **Matrices compagnons**. Soit n un entier naturel non nul. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbf{C}[X]$. On lui associe sa *matrice compagnon* C_P définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ par

$$\mathrm{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

(a) Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer $\mathrm{C}_P^k e_1$ dans la base $\mathcal{E}$. En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$, la matrice $Q(\mathrm{C}_P)$ est non nulle.

En déduire le degré du polynôme minimal de C_P.

(b) Exprimer $\mathrm{C}_P^n e_1$ dans la base $\mathcal{E}$. En déduire que P est le polynôme minimal de C_P.

(c) En déduire le polynôme χ_{C_P}.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique χ_M. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes de χ_M comptées avec leur multiplicité. Soit Q un polynôme de $\mathbf{C}[X]$.

(d) Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice $Q(M)$ est

$$\chi_{Q(M)} = \prod_{k=1}^{n} (X - Q(\alpha_k)).$$

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où M est triangulaire.

(e) Soit A un sous-anneau de $\mathbf{C}$. On suppose que le polynôme Q est dans $A[X]$. Soit $P \in A[X]$ un polynôme unitaire dont on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines complexes comptées avec leur multiplicité.

Démontrer que $\prod\limits_{k=1}^{n} (X - Q(\alpha_k))$ est un polynôme de $A[X]$.

II Nombres algébriques

1. (a) On désigne par φ l'indicatrice d'Euler, qui à tout entier $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ associe le nombre d'entiers non nuls inférieurs à n et premiers avec n. Justifier que pour tout entier $d \geqslant 1$, l'ensemble des entiers n tels que $\varphi(n) \leqslant d$ est fini.

(b) En déduire que si $\mathbf{K}/\mathbf{Q}$ est une extension finie de $\mathbf{Q}$, où $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$, alors $\mathbf{K}$ contient un nombre fini de racines de l'unité.

2. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ un nombre algébrique dont on rappelle que l'on a noté π_α son polynôme minimal. On note $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\alpha)$ le plus petit corps contenant α et $\mathbf{Q}$, et $d = [\mathbf{K} : \mathbf{Q}]$, le degré de l'extension de corps $\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}$.

(a) Montrer que π_α est un polynôme irréductible de $\mathbf{Q}[X]$ et que son degré est égal à d.

(b) Montrer que si σ est un morphisme de $\mathbf{Q}$-algèbre de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{C}$, $\sigma(\alpha)$ est une racine de π_α, c'est-à-dire un conjugué de α.

En déduire qu'il y a exactement d tels morphismes de $\mathbf{Q}$-algèbre, que l'on notera $\sigma_k : \mathbf{K} \to \mathbf{C}$, $k \in \{1, \ldots, d\}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ un nombre algébrique et soit $\theta \in \mathbf{K} = \mathbf{Q}(\alpha)$. Comme dans la question précédente, les σ_k avec $k \in \{1, \ldots, d\}$ désignent les morphismes de $\mathbf{Q}$-algèbre de $\mathbf{Q}(\alpha)$.

(a) Justifier que θ est un nombre algébrique.

Tournez la page S.V.P.

On pose

$$P_\theta = \prod_{k=1}^{d} (X - \sigma_k(\theta)) \in \mathbf{C}[X].$$

(b) Montrer que $P_\theta \in \mathbf{Q}[X]$.

(c) Justifier que π_θ divise P_θ, puis montrer que P_θ est une puissance de π_θ.

4. Montrer qu'un nombre algébrique α est un entier algébrique si et seulement si son polynôme minimal est à coefficients entiers.

5. Soit α un nombre complexe.

   (a) Montrer que si α est un entier algébrique, alors le groupe additif G engendré par la partie $\{\alpha^n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est de type fini.

   (b) Réciproquement, montrer que si G est de type fini alors α est un entier algébrique.

   Indication : En notant $(g_1, \ldots, g_n)$ une famille génératrice finie de G, on pourra considérer le déterminant du système obtenu en écrivant les éléments αg_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ comme combinaison linéaire des g_j.

6. En déduire que l'ensemble $\mathfrak{O}_{\mathbf{C}}$ des entiers algébriques de $\mathbf{C}$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.

   Indication : On pourra utiliser sans démonstration qu'un sous-groupe d'un groupe abélien de type fini est de type fini.

7. Montrer que $\mathfrak{O}_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$.

☛ *Dans la suite, on considère le corps $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}(\zeta)$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ avec p premier impair, et on note $\mathfrak{O}_{\boldsymbol{K}}$ l'ensemble des entiers algébriques de $\boldsymbol{K}$. On pose $\lambda = 1 - \zeta$.*
On définit la norme *et la* trace *de tout élément $\theta \in \boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}(\zeta)$ par*

$$\mathrm{N}(\theta) = \prod_{k=1}^{p-1} \sigma_k(\theta) \text{ et } \mathrm{Tr}(\theta) = \sum_{k=1}^{p-1} \sigma_k(\theta),$$

où les σ_k sont les morphismes de $\boldsymbol{Q}$-algèbre de $Q(\zeta)$ définis dans la question 2 de cette partie. ☚

III Le corps $Q(\zeta)$ et son anneau d'entiers

1. (a) Montrer que les morphismes de $\mathbf{Q}$-algèbre de $\mathbf{Q}(\zeta)$ sont les σ_k tels que $\sigma_k(\zeta) = \zeta^k$, avec $k \in \{1, ..., p-1\}$.

   (b) i. Montrer que $\mathrm{N}(\zeta) = 1$ et $\mathrm{Tr}(\zeta) = -1$.

   ii. Montrer que $\mathrm{N}(1-\zeta) = p$ et $\mathrm{N}(1+\zeta) = 1$.

2. Montrer l'inclusion $\mathbf{Z}[\zeta] \subseteq \mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$.

3. Soit $z \in \mathbf{Z}[\zeta]$.

   (a) Montrer que $z \in \mathbf{Z}[\zeta]^\times$ si et seulement si $\mathrm{N}(z) \in \{-1, +1\}$.

   (b) Montrer que si $\mathrm{N}(z)$ est un nombre premier, alors z est irréductible.

4. Le but de cette question est de montrer que l'ensemble G des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{K}$ est formé exactement des éléments de la forme $\pm\zeta^k$, $k \in \{0, \ldots, p-1\}$.

   (a) Justifier que G est un groupe fini cyclique, dont on notera n le cardinal.

   (b) Soit ω un générateur de G. Justifier que $2p \mid n$ et que $\mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{Q}(\omega)$.

   (c) En déduire que $n = 2p$ et conclure.

5. On note $\langle\lambda\rangle = \lambda\mathbf{Z}[\zeta]$, l'idéal de $\mathbf{Z}[\zeta]$ engendré par λ.
   (a) Montrer que $\langle\lambda\rangle \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,p-1\}$, on a $\dfrac{1-\zeta}{1-\zeta^k} \in \mathbf{Z}[\zeta]^\times$ et en déduire que

$$\lambda^{p-1}\mathbf{Z}[\zeta] = p\mathbf{Z}[\zeta].$$

   (c) Soit ψ le morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[X]$ dans $\mathbf{Z}[\zeta]/\langle\lambda\rangle$, qui à $P \in \mathbf{Z}[X]$ associe $P(\zeta) \pmod{\langle\lambda\rangle}$. Déterminer l'image de ψ et montrer que $\ker\psi$ est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{Z}[X]$ tels que $P(1) = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$.
   (d) En déduire que $\mathbf{Z}[\zeta]/\langle\lambda\rangle$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p$.
   (e) Que peut-on en déduire pour l'idéal $\langle\lambda\rangle$?
6. On détermine ici la structure de $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$. Le but est de démontrer que les éléments de $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$ sont les $\zeta^r\varepsilon$, où $r \in \mathbf{Z}$ et ε est un réel inversible de $\mathbf{Z}[\zeta]$.
   Soit $u \in \mathbf{Z}[\zeta]^\times$.
   (a) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré d, dont on note $\alpha_1,\ldots,\alpha_d$ les racines complexes comptées avec leur multiplicité. On suppose que pour tout $k \in \{1,\ldots,d\}$, α_k est de module 1.
      i. Montrer que pour tout $k \in \{0,\ldots,d\}$, on a $|a_k| \leqslant \binom{d}{k}$.
      En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers algébriques de degré d dont tous les conjugués sont de module 1.
      ii. En déduire également que les racines de P sont des racines de l'unité.
      Indication : On pourra considérer les polynômes $P_n = \prod_{k=1}^{d}(X-\alpha_k^n)$, $n \in \mathbf{N}$, dont on montrera qu'ils sont dans $\mathbf{Z}[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $u = P(\zeta)$. Montrer que, pour tout $k \in \{1,\ldots,p-1\}$, $u_k = P(\zeta^k)$ est un conjugué de u, et que c'est un élément de $\mathbf{Z}[\zeta]^\times$.
   (c) Justifier que $\dfrac{u_1}{u_{p-1}}$ est un entier algébrique dont tous les conjugués sont de module 1.
   (d) En déduire qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $\dfrac{u_1}{u_{p-1}} = \pm\zeta^m$.
   (e) i. Soit $\theta \in \mathbf{Z}[\zeta]$. Justifier qu'il existe un entier $a \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = a \pmod{\langle\lambda\rangle}$. En déduire que deux éléments conjugués de $\mathbf{Z}[\zeta]$ sont égaux modulo $\langle\lambda\rangle$.
      ii. Démontrer que $\dfrac{u_1}{u_{p-1}} = \zeta^m$.
   (f) Justifier l'existence de $r \in \mathbf{Z}$ tel que $2r = m \pmod{p\mathbf{Z}}$. On pose $\varepsilon = \zeta^{-r}u$. Montrer que $\varepsilon \in \mathbf{R}$ et conclure.
7. Le but de ce qui suit est de montrer que $\mathfrak{O}_{\mathbf{K}} = \mathbf{Z}[\zeta]$.
   (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathfrak{O}_{\mathbf{K}}$, on a $\mathrm{N}(\theta) \in \mathbf{Z}$ et $\mathrm{Tr}(\theta) \in \mathbf{Z}$.
   (b) Soit $\theta \in \mathbf{K} = \mathbf{Q}(\zeta)$ un entier algébrique. Il existe des rationnels $a_0,\ldots,a_{p-2}$ tels que

$$\theta = \sum_{k=0}^{p-2} a_k\zeta^k.$$

      i. Pour $k \in \{0,\ldots,p-2\}$, calculer $b_k = \mathrm{Tr}(\theta\zeta^{-k} - \theta\zeta)$ et justifier que $b_k \in \mathbf{Z}$.

ii. Montrer qu'il existe des entiers $c_0, c_1, \ldots, c_{p-2}$, que l'on exprimera en fonction des b_k, tels que $p\theta = \sum\limits_{k=0}^{p-2} c_k \lambda^k$. Justifier ensuite que pour tout $k \in \{0, \ldots, p-2\}$

$$b_k = \sum_{\ell=k}^{p-2} (-1)^\ell \binom{\ell}{k} c_\ell.$$

iii. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbf{Z}[\zeta]$ tel que $p = \lambda^{p-1}\beta$. En déduire que $p \mid c_0$, puis que pour tout $k \in \{0, \ldots, p-2\}$, on a $p \mid c_k$. Conclure.

IV Le théorème de Fermat pour $p = 3$

On cherche à démontrer dans cette partie que l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 \tag{1}$$

n'a pas de solution entières non triviales, *i. e.*, telles que $xyz \neq 0$.

Soient x, y et z trois entiers relatifs tels que $x^3 + y^3 + z^3 = 0$.

1. On suppose que $3 \nmid xyz$. Montrer que x^3 vaut $+1$ ou $-1 \pmod 9$ et conclure à une impossibilité.

☛ *On traite à présent le cas $3 \mid xyz$. Dans la suite de cette partie, on note $\lambda = 1 - j$ avec toujours $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on suppose que les entiers x, y et z sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[j]$ (et pas seulement dans $\mathbf{Z}$), cas auquel on peut se ramener en divisant par leur* `pgcd` *dans $\mathbf{Z}[j]$.* ☚

2. Montrer que 3 et λ^2 sont associés dans $\mathbf{Z}[j]$, ce que l'on a noté $3 \sim \lambda^2$.
3. Soit $s \in \mathbf{Z}[j]$ tel que $s \neq 0 \pmod{\langle \lambda \rangle}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tel que $s^3 = \varepsilon \pmod{\langle \lambda^4 \rangle}$.

   Indication : On pourra remarquer que tout élément $s \in \mathbf{Z}[j]$ est congru à $-1, 0$ ou $1 \pmod{\langle \lambda \rangle}$.

☛ *Par symétrie des rôles de x, y et z, on peut supposer que $3 \mid z$ (et donc $3 \nmid x$, $3 \nmid y$ puisqu'ils sont premiers entre eux). En particulier, on a $\lambda \mid z$, $\lambda \nmid x$ et $\lambda \nmid y$ dans $\mathbf{Z}[j]$.*
On note n la valuation en λ de z ; il existe donc $\mu \in \mathbf{Z}[j]$ premier avec λ tel que $z = \mu\lambda^n$, et par hypothèse $n \geqslant 1$. On a donc $x^3 + y^3 + \mu^3\lambda^{3n} = 0$.
La propriété suivante (qui pourra être utilisée sans plus de justification) est donc vérifiée :

$$(P_n) : \text{il existe } \alpha, \beta, \delta \in \mathbf{Z}[j] \text{ et } \omega \in \mathbf{Z}[j]^\times \text{ tels que } \begin{cases} \lambda \nmid \alpha\beta\delta, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ premiers entre eux}, \\ \alpha^3 + \beta^3 + \omega\lambda^{3n}\delta^3 = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que si (P_n) est vérifiée, alors $n \geqslant 2$ et (P_{n-1}) est également vérifiée. ☚

4. Supposons (P_n) vérifiée pour un quadruplet $(\alpha, \beta, \delta, \omega)$. En considérant les valeurs de α^3, β^3 et $\omega\lambda^{3n}\delta^3 \pmod{\langle \lambda^4 \rangle}$, montrer que $n \geqslant 2$.
5. Supposons (P_n) vérifiée pour un quadruplet $(\alpha, \beta, \delta, \omega)$. On montre dans cette question que (P_{n-1}) est également vérifiée.

   (a) Montrer que
   $$-\omega\lambda^{3n}\delta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + j\beta)(\alpha + j^2\beta).$$

(b) En déduire que λ divise chacun des facteurs $\alpha+\beta$, $\alpha+j\beta$ et $\alpha+j^2\beta$.

(c) Démontrer que λ est un `pgcd` de $\alpha+\beta$ et $\alpha+j\beta$. En déduire que λ^2 divise exactement l'un des éléments $\alpha+\beta$, $\alpha+j\beta$ ou $\alpha+j^2\beta$.

Quitte à remplacer β par $j\beta$ ou $j^2\beta$, on peut supposer que λ^2 divise $\alpha+\beta$. Il existe donc des éléments κ_1, κ_2 et κ_3 de $\boldsymbol{Z}[j]$ tels que $\lambda \nmid \kappa_1\kappa_2\kappa_3$ et

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \lambda^{3n-2}\kappa_1, \\ \alpha+j\beta = \lambda\kappa_2, \\ \alpha+j^2\beta = \lambda\kappa_3. \end{cases}$$

(d) Montrer que $-\omega\delta^3 = \kappa_1\kappa_2\kappa_3$ et en déduire qu'il existe des éléments γ_1, γ_2 et γ_3 de $\mathbf{Z}[j]$ tels que pour tout $\ell \in \{1,2,3\}$, $\kappa_\ell \sim \gamma_\ell^3$.

(e) Démontrer qu'il existe deux inversibles τ et τ' de $\mathbf{Z}[j]^\times$ tels que

$$\gamma_2^3 + \tau\gamma_3^3 + \tau'\lambda^{3(n-1)}\gamma_1^3 = 0.$$

(f) Montrer que si $\tau = \pm 1$, alors (P_{n-1}) est vérifiée.

(g) Montrer que $\tau = \pm 1 \pmod{\langle \lambda^3 \rangle}$, puis que $\tau \notin \{j, -j, j^2, -j^2\}$.

6. Conclure que l'équation (1) n'a pas de solution (x,y,z) dans le cas $3 \mid xyz$.

V Le théorème de Fermat pour p régulier et $p \nmid xyz$

☛ *On admet dans la suite que pour tout corps $\boldsymbol{K}$ de degré fini sur $\boldsymbol{Q}$, son anneau des entiers $\mathfrak{O}_{\boldsymbol{K}}$ vérifie la propriété suivante : tout idéal non nul de $\mathfrak{O}_{\boldsymbol{K}}$ s'écrit comme produit d'idéaux premiers, de manière unique à l'ordre près des facteurs.*
Dans ce contexte, on dit que deux idéaux I et J sont premiers entre eux *s'ils n'ont pas d'idéal premier en commun dans leur décomposition en produit d'idéaux premiers.*
*L'anneau $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ qui est, d'après les résultats de la Partie **III**, l'anneau des entiers de $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}(\zeta)$ vérifie donc cette propriété de factorisation de ses idéaux.*
On suppose dans cette partie que $p > 3$ est un nombre premier régulier*, ce qui signifie que si I est un idéal de $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ tel que I^p est principal, alors I est lui même principal. On rappelle que l'on a noté $\lambda = 1-\zeta$ et que certaines propriétés de l'idéal $\langle\lambda\rangle$ ont été étudiées en Partie **III**, question 5.*
On démontre dans cette partie que l'équation

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{2}$$

n'admet pas de solutions entières non triviales dans le cas où $p \nmid xyz$.
Par l'absurde, on se donne trois entiers $x, y, z \in \boldsymbol{Z}$ deux à deux premiers entre eux dans $\boldsymbol{Z}$, tels que $p \nmid xyz$ et qui vérifient l'équation (2). ☚

1. Montrer l'égalité d'idéaux
$$\prod_{k=0}^{p-1} \langle x + \zeta^k y \rangle = \langle z^p \rangle.$$

2. Soit deux entiers k et ℓ tels que $0 \leqslant k < \ell \leqslant p-1$. On montre dans cette question que les idéaux $\langle x+\zeta^k y\rangle$ et $\langle x+\zeta^\ell y\rangle$ de $\mathbf{Z}[\zeta]$ sont premiers entre eux. Par l'absurde, soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier divisant $\langle x+\zeta^k y\rangle$ et $\langle x+\zeta^\ell y\rangle$.

(a) En considérant $(x+\zeta^\ell y) - (x+\zeta^k y)$, montrer que $\lambda y \in \mathfrak{P}$.

(b) Montrer que $y \notin \mathfrak{P}$, en déduire que $x + y \in \langle\lambda\rangle \cap \mathbf{Z}$ et conclure à une absurdité.

Tournez la page S.V.P.

3. Justifier l'existence d'un idéal I tel que $\langle x + \zeta y \rangle = I^p$.
4. Montrer qu'il existe $r \in \mathbf{Z}$, ε réel inversible de $\mathbf{Z}[\zeta]$ et $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ tels que $x + \zeta y = \zeta^r \varepsilon \alpha^p$.
5. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{Z}$ tel que $\alpha^p = a \pmod{\langle p \rangle}$ (attention, ici $\langle p \rangle = p\mathbf{Z}[\zeta]$ et non $p\mathbf{Z}$) et en déduire que
$$x\zeta^{-r} + y\zeta^{1-r} - x\zeta^r - y\zeta^{r-1} = 0 \pmod{\langle p \rangle}.$$
6. Supposons que $r = 0 \pmod{p\mathbf{Z}}$. Montrer alors que $p \mid y$ dans $\mathbf{Z}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On montrerait de même que l'on ne peut avoir $r = 1 \pmod{p\mathbf{Z}}$, ce que l'on admet.

7. D'après la question 5, il existe $\beta \in \mathbf{Z}[\zeta]$ tel que
$$x\zeta^{-r} + y\zeta^{1-r} - x\zeta^r - y\zeta^{r-1} = \beta p.$$
Montrer que deux des entiers $\pm r, \pm(1-r)$ sont égaux modulo p ; en déduire que $2r = 1 \pmod{p\mathbf{Z}}$.
8. Montrer que $\beta p \zeta^r = (x - y)\lambda$, puis que $x = y \pmod{p\mathbf{Z}}$.
9. Conclure à une absurdité.

9.2 Composition d'analyse et probabilités

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EAE MAT 2

SESSION 2019

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	102	2678

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations

- On utilise les notations $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- Pour un ensemble $A \subset \mathbf{R}^N$, avec $N \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{1}_A$ la *fonction indicatrice de* A, c'est-à-dire la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.
- Pour tout réel strictement positif ρ, on note

$$\mathcal{D}_\rho = \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| \leq \rho\}, \quad \mathcal{B}_\rho = \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| < \rho\}, \quad \mathcal{C}_\rho = \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| = \rho\}.$$

On utilisera la même notation pour désigner les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ correspondants :

$$\mathcal{D}_\rho = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{x^2+y^2} \leq \rho\right\}, \quad \mathcal{B}_\rho = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{x^2+y^2} < \rho\right\},$$
$$\mathcal{C}_\rho = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{x^2+y^2} = \rho\right\}.$$

- **Distribution de Dirac :** Pour $a \in \mathbf{R}^N$, on note δ_a la forme linéaire définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}^N$ par $\phi \longmapsto \langle \delta_a | \phi \rangle = \phi(a)$.

Définitions et rappels

On rappelle ici quelques définitions et des énoncés utiles qui pourront être exploités **sans démonstration** tout au long du sujet :

- Toute fonction *holomorphe* sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est de classe C^∞ sur cet ouvert.
- Toute fonction *méromorphe* sur $\mathbf{C}$ est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$.
- **Convergence presque sûre :** On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *converge presque sûrement* vers une variable X de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'il existe un ensemble $\Omega' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.
- **Loi forte des grands nombres :** Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables à valeurs dans $\mathbf{C}$, indépendantes, identiquement distribuées, et admettant une espérance $\mu \in \mathbf{C}$, alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement vers μ.

Organisation du sujet

La partie **I** établit des résultats élémentaires qui ne seront utilisés qu'en partie **VI**. Il convient d'y consacrer un temps raisonnable, et en particulier de ne pas trop s'attarder sur certaines questions si on ne parvient pas à y répondre suffisamment rapidement. L'objectif de la partie **II** est de démontrer un résultat relativement classique autour des solutions élémentaires du Laplacien dans le plan, qui sera utilisé en partie **VI**. Elle débute par des observations et calculs en dimension 1 qui permettent de se familiariser avec la notion de solution au sens des distributions. Les parties **III** et **IV** portent principalement sur des résultats d'analyse complexe autour du problème de Dirichlet et la notion de noyau de Poisson. Elles permettent d'établir la formule de Poisson-Jensen, qui sera utilisée en partie **VI**. La partie **IV** ne fait appel qu'au dernier résultat de la partie **III**. La partie **V** est indépendante des autres parties et porte sur des résultats concernant les points critiques de polynômes aléatoires. Elle fait appel à des techniques de probabilités ainsi que d'analyse complexe. La partie **VI** permet d'apporter une généralisation, par le biais de méthodes assez différentes, aux résultats obtenus en partie **V**.

I - Des inégalités utiles pour la suite

1) Justifier que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout $(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbf{R}^m$, on a $\left(\sum_{j=1}^{m} w_j\right)^2 \leq m \sum_{j=1}^{m} w_j^2$.

2) **Inégalité de Markov :** Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si Z est presque sûrement positive ou nulle, alors pour tout réel strictement positif a, on a

$$\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}.$$

3) On définit pour tout $x > 0$,

$$\ln_-(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \ln_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ \ln x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a) Tracer l'allure des courbes représentatives de $\ln_-$ et $\ln_+$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, on a

$$\ln_+\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln_+(x_k) + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln_-\left(\frac{1}{x_k}\right) + \ln n.$$

Indication : on pourra commencer par examiner le cas où la somme des x_k est inférieure ou égale à 1.

II - Solutions élémentaires du Laplacien en dimensions 1 et 2

1) **Solutions élémentaires du Laplacien en dimension 1**

a) Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Justifier que

$$\int_{\mathbf{R}} |x|\, \varphi''(x) \mathrm{d}x = 2\varphi(0).$$

On écrira alors $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \frac{|x|}{2} = \delta_0$ et on dira que cette égalité est comprise « au sens des distributions ».

b) Justifier de même, pour tout réel a, l'écriture (toujours au sens des distributions) : $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \frac{|x-a|}{2} = \delta_a$.

c) On définit l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbf{R}$, admettant un nombre fini $n \in \mathbf{N}$ (qui dépend de f) de points de non dérivabilité $a_1 < \ldots < a_n$, et affines sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, où l'on a posé $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$ (avec la convention que si $f \in E$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, $n = 0$, l'ensemble des points de non dérivabilité est vide et f est affine sur $\mathbf{R}$).

Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on pose $f_a \ :\ x \longmapsto |x-a|$ et on note id $:\ x \longmapsto x$.

(i) Soit $f\ :\ x \longmapsto (-2x+1)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}(x) + (1+3x)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x)$. Justifier que f est dans E et montrer que f est combinaison linéaire de la famille de fonctions $(f_0, \mathrm{id}, \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$.

(ii) Soit f une fonction de E non dérivable en au moins un point de $\mathbf{R}$ et soient $a_1 < \ldots < a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) ses points de non dérivabilité. Montrer l'existence d'un unique $(n+2)$-uplet de réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \gamma) \in (\mathbf{R}^*)^n \times \mathbf{R}^2$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{a_i} + \beta \mathrm{id} + \gamma \mathbf{1}_{\mathbf{R}}.$$

Indication : Pour l'existence, on pourra raisonner par récurrence sur le nombre n de points de non dérivabilité de f.

(iii) Donner alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'expression de α_i en fonction de la différence des pentes de la fonction f à droite et à gauche du point a_i.

(iv) Tracer la représentation graphique en repère orthonormé de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2, \\ 3 + \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [-2, 4], \\ 1 + x & \text{si } x > 4, \end{cases}$$

puis donner la décomposition de cette fonction sur la famille $(f_{-2}, f_4, \mathrm{id}, \mathbf{1}_{\mathbf{R}})$.

(v) Déduire de ce qui précède, pour toute fonction $f \in E$, l'expression (au sens des distributions) de son Laplacien $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f$ comme combinaison linéaire de distributions de Dirac.

2) Fonctions harmoniques et solutions élémentaires du Laplacien dans le plan

On désigne par Δ l'opérateur Laplacien $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ sur $\mathbf{R}^2$. Dans tout ce qui suit, on identifiera $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec le nombre complexe $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Pour une fonction définie sur $\mathbf{C}$, en notant $z = x + iy$, on considère donc des dérivées partielles par rapport aux parties réelle et imaginaire de la variable complexe.

On rappelle les relations :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

de sorte que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

On dit qu'une fonction h définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$ est *harmonique* sur $\mathcal{O}$ si h est de classe C^2 et vérifie $\Delta h = 0$ sur $\mathcal{O}$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pose

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\ :\ \sqrt{x^2 + y^2} \geq \varepsilon\right\}.$$

On pourra utiliser ici **sans plus de justification** que, si u et v sont des fonctions de classe C^∞ sur Ω_ε et si u est à support compact dans $\mathbf{R}^2$, alors on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(x,y)\Delta u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Omega_\varepsilon} u(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \varepsilon\int_0^{2\pi} \vec{n}_\theta \cdot \left(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v\right)(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

où $\vec{n}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ désigne le vecteur unitaire normal intérieur à Ω_ε en θ et $\vec{\nabla}u$ désigne le vecteur de composantes $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}u, \dfrac{\partial}{\partial y}u\right)$.

a) Justifier que si une fonction est holomorphe sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C}$, ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques sur $\mathcal{O}$.

b) Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.

(i) En remarquant (et justifiant) que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\Delta\varphi(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_{\mathbf{R}_+}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta.$$

(ii) A-t-on (au sens des distributions, et en identifiant $z = x+iy \in \mathbf{C}$ et $(x,y)\in\mathbf{R}^2$) égalité entre $\Delta\left(\frac{|z|}{2}\right)$ et δ_0 ?

c) Soit toujours φ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles.

(i) Montrer que $(x,y)\longmapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$.

(ii) Montrer que $(x,y)\longmapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ est harmonique sur $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \ln(\sqrt{x^2+y^2})\Delta\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon.$$

(iv) Montrer qu'on peut trouver une constante $C > 0$, indépendante de $\varepsilon \in]0,1]$, telle que

$$\left| I_\varepsilon - \int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right| \leq C\varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

(v) Justifier alors l'écriture (au sens des distributions)

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\left(\ln(|z|)\right) = \delta_0.$$

d) Soit f une fonction holomorphe et non identiquement nulle sur $\mathbf{C}$. Soit φ une fonction de classe C^∞ à support compact $K \subset \mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On peut donc introduire un réel strictement positif R tel que $K \subset \mathcal{D}_R$.

(i) Justifier que f possède un nombre fini de zéros dans $\mathcal{D}_R$.

(ii) On note $z_1,\ldots,z_n$ les zéros de f qui se situent dans $\mathcal{D}_R$ et $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ leurs multiplicités respectives ($n\in\mathbf{N}$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbf{N}^*)^n$ avec la convention que si $n=0$, l'ensemble des zéros contenus dans $\mathcal{D}_R$ est vide). Il existe donc une fonction g holomorphe ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}_R$ telle que pour tout $z\in\mathbf{C}$,

$$f(z) = g(z)\prod_{k=1}^n (z-z_k)^{\alpha_k}.$$

Justifier alors l'existence d'une fonction h holomorphe sur $\mathcal{B}_R$ telle que $g = e^h$ sur $\mathcal{B}_R$. En déduire que pour tout $z\in\mathcal{B}_R$, on a

$$\Delta\ln(|g(z)|) = 2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\ln(|g(z)|^2) = 0.$$

(iii) Justifier alors l'écriture suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \ln|f(z)| = \sum_{\xi\in\mathbf{C} \text{ tel que } f(\xi)=0} \delta_\xi \quad \text{(les zéros de } f \text{ étant comptés avec leur ordre de multiplicité).}$$

III - Problème de Dirichlet sur le disque et formule intégrale de Poisson

On considère une fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$ et à valeurs complexes. Le but de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction g continue sur $\mathcal{D}_1$ et à valeurs complexes, harmonique sur $\mathcal{B}_1$ et égale à f sur $\mathcal{C}_1$ (*problème de Dirichlet sur le disque*).

1) **Noyau de Poisson.** Soit $R > 0$ fixé. Pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$P_R(r,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{int}.$$

a) En utilisant un théorème de régularité sous le signe somme, justifier que $t \longmapsto P_R(r,t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Soit $r \in [0, R[$ et $t \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que $P_R(r,t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(nt) = \mathrm{Re}\left(\frac{R+re^{it}}{R-re^{it}}\right) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t)+r^2}$.

(ii) En déduire que $t \longmapsto P_R(r,t)$ est 2π-périodique, uniformément continue, positive et paire sur $\mathbf{R}$.

2) Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$, continue sur $\mathcal{D}_1$ et harmonique sur $\mathcal{B}_1$.

a) Justifier l'existence de $z_0 \in \mathcal{D}_1$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, on a $|g(z)| \leq |g(z_0)|$.

b) On suppose dans un premier temps, *et uniquement dans cette question*, que $|g(z_0)| > 0$. On pose alors pour tout $z \in \mathcal{D}_1$,

$$h(z) = \frac{|g(z_0)|}{g(z_0)} g(z).$$

(i) Vérifier que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$, on a $\mathrm{Re}(h(z)) \leq |g(z)| \leq \mathrm{Re}(h(z_0))$.

(ii) On définit φ sur $\mathcal{D}_1$ par $\varphi(x,y) = \mathrm{Re}(h(x+iy))$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\psi_\varepsilon(x,y) = \varphi(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2).$$

Justifier que $\Delta\psi_\varepsilon > 0$ sur $\mathcal{B}_1$. En déduire que ψ_ε ne peut atteindre de maximum local sur $\mathcal{B}_1$ puis que, pour tout $(x,y) \in \mathcal{B}_1$, on a

$$\varphi(x,y) \leq \max\big\{\varphi(x,y),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } x^2+y^2 = 1\big\}.$$

(iii) En déduire l'existence de $\tilde{z}_0 \in \mathcal{C}_1$ tel que pour tout $z \in \mathcal{D}_1$ on a $\mathrm{Re}(h(z)) \leq \mathrm{Re}(h(\tilde{z}_0))$.

(iv) Justifier que $|g(\tilde{z}_0)| = \max\limits_{\mathcal{D}_1} |g|$.

c) Conclure de ce qui précède que $\max\limits_{z\in\mathcal{D}_1} |g(z)| = \max\limits_{z\in\mathcal{C}_1} |g(z)|$.

d) En déduire l'unicité de la fonction g solution au problème de Dirichlet sur $\mathcal{D}_1$ (si une telle solution existe).

Tournez la page S.V.P.

3) Pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_1$, avec $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on définit $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(r,\theta - t) f(e^{it})\,\mathrm{d}t$.

a) On note, pour tout réel t, $\phi_1(t)$ la partie réelle de $f(e^{it})$ et $\phi_2(t)$ la partie imaginaire de $f(e^{it})$. Montrer que $g(z) = g_1(z) + ig_2(z)$ avec, pour tout $k \in \{1,2\}$, $g_k(z) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\phi_k(t)\mathrm{d}t\right)$.

b) En déduire que g est harmonique sur $\mathcal{B}_1$.

Pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, on note désormais $\Psi(f)$ la fonction définie sur le disque $\mathcal{D}_1$ par :

$$z \in \mathcal{D}_1 \longmapsto \Psi(f)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \mathcal{C}_1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(r,\theta - t) f(e^{it})\,\mathrm{d}t & \text{si } z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on note f_k la fonction définie sur $\mathcal{C}_1$ par : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$.

4)a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $z \in \mathcal{B}_1$, on a $\Psi(f_k)(z) = r^{|k|}e^{ik\theta}$,

b) En déduire que $\Psi(f_k)$ est solution du problème de Dirichlet sur le disque pour la fonction f_k.

5) Justifier à l'aide de ce qui précède que pour tout polynôme trigonométrique $p = \displaystyle\sum_{|k|\le n} c_k f_k$, la fonction $\Psi(p)$ est solution du problème de Dirichlet sur le disque pour la fonction p.

6)a) Justifier que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_1(r,t)\mathrm{d}t = 1$.

b) En déduire que pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, on a $\displaystyle\sup_{z\in\mathcal{D}_1} |\Psi(f)(z)| \le \sup_{z\in\mathcal{C}_1} |f(z)|$.

7) Conclure, à l'aide du théorème de Fejér, que pour toute fonction f continue sur $\mathcal{C}_1$, $\Psi(f)$ est solution du problème de Dirichlet sur le disque unité pour f.

8) Justifier, à l'aide de ce qui précède, que pour tout $R > 0$, si u est une fonction continue sur $\mathcal{D}_R$ et si u est harmonique sur $\mathcal{B}_R$, alors pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_R$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta - t) u(Re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

IV - Formule de Poisson-Jensen

On reprend les notations de la partie **III**.

Soit f une fonction *méromorphe* sur $\mathbf{C}$ et soit $R > 0$.

On note $a_1, \ldots, a_m$ les zéros (non nécessairement distincts) de f situés dans $\mathcal{D}_R$ et $b_1, \ldots, b_n$ les pôles (non nécessairement distincts) de f situés dans $\mathcal{D}_R$. Il existe alors une fonction g méromorphe sur $\mathbf{C}$ et n'admettant aucun pôle ni zéro dans $\mathcal{D}_R$ telle que

$$f(z) = g(z)\prod_{i=1}^{m}(z - a_i)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{z - b_j}.$$

1)a) Justifier que si $(a,\omega) \in \mathbf{C}^2$ sont tels que $a \in \mathcal{B}_R$ et $\omega \in \mathcal{C}_R$ alors $1 = \dfrac{R\,|\omega - a|}{|R^2 - \bar{a}\omega|}$.

b) Soit $a \in \mathcal{B}_R$. Justifier que $z \longmapsto \ln\left|R^2 - \bar{a}z\right|$ est harmonique sur $\mathcal{B}_R$. En déduire que pour tout $z = re^{i\theta}$ tel que $z \in \mathcal{B}_R$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta - t)\ln\left|Re^{it} - a\right|\mathrm{d}t = \ln\left|R^2 - \bar{a}z\right| - \ln R.$$

c) Justifier que cette formule est encore valable si $a \in \mathcal{C}_R$.

Indication : on pourra, à $z \in \mathcal{B}_R$ fixé, pour $a \in \mathcal{C}_R$ donné et $x \in [0,1[$, poser $a_x = xa$ et justifier le passage à la limite $x \to 1$.

2) Justifier que pour tout $z = re^{i\theta}$ de $\mathcal{B}_R$, on a $\ln|g(z)| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta - t)\ln|g(Re^{it})|\,\mathrm{d}t$.

3) Utiliser les résultats précédents pour prouver que, si $z = re^{i\theta} \in \mathcal{B}_R$ n'est ni un zéro ni un pôle de f, alors on a

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r,\theta - t)\ln|f(Re^{it})|\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{m}\ln\left|\frac{R^2 - \overline{a_i}z}{R(z - a_i)}\right| + \sum_{j=1}^{n}\ln\left|\frac{R^2 - \overline{b_j}z}{R(z - b_j)}\right|.$$

V - Points critiques de polynômes aléatoires aux racines identiquement distribuées - Cas où les racines sont distribuées non uniformément sur le cercle unité de $\mathbf{R}^2$

1) Critère de Weyl sur le segment $[0,1]$

On dit qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ de réels de $[0,1]$ est *équidistribuée dans* $[0,1]$ si pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, avec $a \leq b$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{[a,b]}(u_j) = b - a.$$

a) Justifier qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$ si et seulement si pour toute fonction $f\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$.

Indication : Pour le sens direct, on pourra commencer par justifier que le résultat est valable pour toute fonction en escalier.

b) En déduire que si $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0,1]$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi k u_j} = 0.$$

c) Réciproquement, on suppose qu'une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ vérifie, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi k u_j} = 0$.

(i) Justifier que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ et à valeurs complexes, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_j) = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Indication : On pourra commencer par démontrer ce résultat pour une fonction f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles, et vérifiant $f(0) = f(1)$.

Tournez la page S.V.P.

(ii) Soit $[a, b] \subset [0, 1]$. On pose $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions g et h continues sur $[0, 1]$ telles que $g \leq f \leq h$ sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 (h - g)(u)\,\mathrm{d}u \leq \varepsilon$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(u_j) = b - a.$$

d) Application : montrer que si $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ alors la suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_j = j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ (où pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) est équidistribuée dans $[0, 1]$.

2) Soit $(\Theta_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et identiquement distribuées sur le segment $[0, 1]$ selon une distribution de probabilité ν. On note, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, $Z_j = e^{2i\pi\Theta_j}$ et Z une variable suivant la loi commune aux Z_j, $j \in \mathbf{N}^*$. On note alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbb{E}(Z^k) = \displaystyle\int_0^1 e^{2ik\pi t}\mathrm{d}\nu(t)$ l'espérance de Z^k.

a) Justifier que si ν est uniforme sur $[0, 1]$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{E}(Z^k) = 0$.

b) Réciproquement, on suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{E}(Z^k) = 0$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2i\pi k\Theta_j}$ tend presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(ii) En déduire l'existence d'un ensemble $\Omega' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, la suite $(\Theta_j(\omega))_{j\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0, 1]$.

(iii) En remarquant que pour $(a, b) \in [0, 1]^2$, $a \leq b$ fixés, et pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{[a,b]}(\Theta_j)) = \nu([a, b])$, en déduire que ν est uniforme sur $[0, 1]$.

3) On reprend les notations du **2)** et on suppose désormais que ν n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

On définit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ le polynôme aléatoire

$$z \in \mathbf{C} \longmapsto P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - Z_k)$$

(ce qui signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $P_n(z)(\omega) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(z - Z_k(\omega))$). On note $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_{n-1}^{(n)}$ les racines (aléatoires et non nécessairement distinctes) de P_n'. On définit alors $\zeta(P_n') = \displaystyle\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \delta_{Y_j^{(n)}}$ où δ_z désigne la mesure de Dirac en z, c'est-à-dire la mesure assignant à tout $A \subset \mathbf{C}$ la valeur 1 si $z \in A$ et 0 sinon.

On note enfin pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a_k = \mathbb{E}(Z^{k+1})$.

a) Justifier que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|a_k| \leq 1$. En déduire que la fonction

$$f \;:\; z \longmapsto -\sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k z^k$$

est bien définie sur la boule unité ouverte $\mathcal{B}_1$ et que pour tout $r \in]0, 1[$, f admet un nombre fini N_r de zéros dans $\mathcal{D}_r$.

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $V_n(z) = \dfrac{P_n'(z)}{nP_n(z)}$.

(i) Montrer que pour tout $z \in \mathcal{B}_1$,

$$V_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - Z_j} = -\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{Z}_j^{k+1}\right) z^k.$$

(ii) En déduire l'existence d'un ensemble $\Omega' \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, $V_n(z)(\omega)$ tend vers $f(z)$ uniformément sur tout compact de $\mathcal{B}_1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Soit $r \in]0, 1[$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}_r$ et soit $\omega \in \Omega'$.

(i) Justifier qu'il existe un $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $z \in \mathcal{C}_r$, $|V_n(z)(\omega) - f(z)| < |f(z)|$. En déduire que pour tout $n \geq N$ et tout $z \in \mathcal{C}_r$, $\dfrac{V_n(z)(\omega)}{f(z)} \notin \mathbf{R}_-$ puis que

$$\int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{V_n'(z)(\omega)}{V_n(z)(\omega)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \mathrm{d}z = 0.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $\psi : z \longmapsto \dfrac{V_n(z)(\omega)}{f(z)}$ *et une primitive de* $\dfrac{\psi'}{\psi}$ *sur un sous-ensemble bien choisi de* $\mathbf{C}$.

(ii) Montrer que si h est une fonction holomorphe au voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}$ et possède un zéro d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$ en a alors il existe une fonction φ holomorphe au voisinage de a telle que $\dfrac{h'(z)}{h(z)} = \dfrac{m}{z-a} + \varphi(z)$.

(iii) En déduire que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathcal{C}_r} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ est égale au nombre N_r de zéros (comptés avec leur multiplicité) de f situés dans $\mathcal{B}_r$ puis que pour tout $n \geq N$, $z \longmapsto V_n(z)(\omega)$ admet exactement N_r zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $\mathcal{B}_r$.

d) En déduire que $\zeta(P_n')(K)$ tend presque sûrement vers 0 pour tout compact K inclus dans $\mathcal{B}_1$.

VI - Points critiques de polynômes aléatoires aux racines identiquement distribuées - Cas général

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbf{C}$. On note μ la mesure de probabilité associée aux Z_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$. On définit pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - Z_k)$$

et en tout z tel que $P_n(z) \neq 0$, on pose

$$L_n(z) = \frac{P_n'(z)}{P_n(z)}.$$

Le but de cette partie est de démontrer que pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{C}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } P_n'(z)=0} \varphi(z) \text{ converge en probabilité vers } \int_{\mathbf{C}} \varphi(z)\ \mathrm{d}\mu(z) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

On rappelle qu'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est dite *converger en probabilité* vers une variable aléatoire Y (elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$) si pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 0.$$

A. Un théorème de convergence dominée (et une première convergence en probabilité)

Soit $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré où ν est une mesure (positive) finie et soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $\Omega \times X$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ (muni de sa tribu borélienne usuelle). On suppose que

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})$-mesurable ;
- il existe $\delta > 0$ pour lequel $\displaystyle\int_X |f_n(., x)|^{1+\delta}\, \mathrm{d}\nu(x)$ est bornée en probabilité, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tels que pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\mathbb{P}\left(\int_X |f_n(., x)|^{1+\delta}\, \mathrm{d}\nu(x) \geq C_\varepsilon\right) \leq \varepsilon\,;$$

- pour presque tout $x \in X$, $(f_n(., x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.

1) On suppose dans un premier temps que ν est une mesure de probabilité. Dans toute la suite, on fixe ε un réel strictement positif.

a) Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Soit $C_p \in \mathbf{R}_+$ et $N_p \in \mathbf{N}$ tels que pour tout entier $n \geq N_p$, on a

$$\mathbb{P}\left(\int_X |f_n(., x)|^{1+\delta}\, \mathrm{d}\nu(x) \geq C_p\right) \leq \frac{1}{p}.$$

(i) Justifier que pour tout $M > 0$, pour tout entier $n \geq N_p$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_X f_n(., x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq M}\, \mathrm{d}\nu(x)\right| \geq \frac{C_p}{M^\delta}\right) \leq \frac{1}{p}.$$

(ii) En déduire l'existence de $M_p > 0$ tel que pour tout entier $n \geq N_p$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_X f_n(., x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq M_p} \mathrm{d}\nu(x)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{p}.$$

b) (i) Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X \mathbb{P}\left(|f_n(., x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}\nu(x) = 0.$

(ii) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq \frac{\varepsilon}{2}} \mathrm{d}\nu(x)\right) = 0.$

(iii) Soit $M > 0$. Conclure à l'aide de l'inégalité de Markov que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\int_X \mathbf{1}_{|f_n(.,x)|\geq \frac{\varepsilon}{2}} \mathrm{d}\nu(x) \geq \frac{\varepsilon}{2M}\right) = 0.$$

(iv) En déduire que pour tout $M > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\int_X f_n(., x)\mathbf{1}_{|f_n(.,x)|< M} \mathrm{d}\nu(x)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

c) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\left(\int_X f_n(., x)\mathrm{d}\nu(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.

2) Montrer que ce résultat reste valable dans le cas où ν est une mesure positive finie quelconque.

B. Application (et seconde convergence en probabilité)

Soit $R \in \mathbf{R}_+^*$.

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\omega \in \Omega$ fixé. On note $x_{1,n}, \ldots, x_{k_n,n}$ les zéros de $z \longmapsto P_n(z)(\omega)$ situés dans $\mathcal{D}_R$ et $y_{1,n}, \ldots, y_{\ell_n,n}$ les zéros de $z \longmapsto P_n'(z)(\omega)$ situés dans $\mathcal{D}_R$ (on a donc $k_n \in \{0, \ldots, n\}$ et $\ell_n \in \{0, \ldots, n-1\}$).

a) Justifier que pour tout $z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}_R \backslash \{x_{1,n}, \ldots, x_{k_n,n}, y_{1,n}, \ldots, y_{\ell_n,n}\}$,

$$\ln |L_n(z)| = I_n(z, R) + \sum_{i=1}^{\ell_n} \ln \left| \frac{R(z - y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n} z} \right| - \sum_{j=1}^{k_n} \ln \left| \frac{R(z - x_{j,n})}{R^2 - \bar{x}_{j,n} z} \right|$$

où on a noté

$$I_n(z, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_R(\rho, \theta - t) \ln \left| L_n(Re^{it}) \right| \, \mathrm{d}t.$$

b) En déduire, en utilisant l'un des résultats de la partie **I**, que

$$\frac{1}{n^2} \ln^2 |L_n(z)| \leq \frac{3}{n^2} I_n(z, R)^2 + \frac{3\ell_n}{n^2} \sum_{i=1}^{\ell_n} \ln^2 \left| \frac{R(z - y_{i,n})}{R^2 - \bar{y}_{i,n} z} \right| + \frac{3k_n}{n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \ln^2 \left| \frac{R(z - x_{j,n})}{R^2 - \bar{x}_{j,n} z} \right|.$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $r \in]0, R[$.

a) Justifier l'existence d'une constante $M(r, R) > 1$ telle que pour tout $z = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{B}_r$ et tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{1}{M(r, R)} < P_R(\rho, \theta - t) < M(r, R).$$

b) En utilisant un des résultats de la partie **I**, justifier que

$$\ln_+ \left| L_n(Re^{it}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \ln_- \left| Re^{it} - Z_k \right| + \ln n.$$

c) Justifier l'existence d'une constante $C(R)$ telle que

$$\sup_{z \in \mathbf{C}} \int_0^{2\pi} \ln_- \left| Re^{it} - z \right| \mathrm{d}t < C(R).$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $z \in \mathcal{B}_r$ on a

$$I_n(z, R) \leq \frac{M(r, R)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln_+ \left| L_n(Re^{it}) \right| \mathrm{d}t \leq \frac{n}{2\pi} M(r, R) C(R) + M(r, R) \ln n,$$

puis justifier l'existence d'une constante $B_1(r, R)$ telle que $\sup_{z \in \mathcal{B}_r} \frac{1}{n} I_n(z, R) \leq B_1(r, R)$.

3) Soit $A = \left\{ z \in \mathbf{C} \text{ tel que } \int_{\mathbf{C}} \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|y - z|} = +\infty \right\}$.

a) Montrer que

$$\int_{\mathbf{C}} \left(\int_{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{1}_{|y-z|<1}}{|y - z|} \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\lambda(z) = 2\pi$$

où on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$.

b) En déduire que $\lambda(A) = 0$.

On admet dans toute la suite du sujet que pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash A$, $\left(\frac{1}{n}\ln|L_n(z)|\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge en probabilité vers 0.*

4) On suppose $0 \notin A$.

a) Justifier que $\mathbb{E}\left(\ln_-\left|\frac{Z_1}{R}\right|\right)$ est finie et que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_n}\ln\left|\frac{x_{j,n}}{R}\right|$ tend presque sûrement vers $-\mathbb{E}\left(\ln_-\left|\frac{Z_1}{R}\right|\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En écrivant la formule de Poisson-Jensen en $z = 0$, en déduire l'existence d'une constante positive $D(R)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}I_n(0,R) \leq -D(R)\right) = 0.$$

c) Montrer que ce dernier résultat reste valable dans le cas général.

5)a) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{B}_r$,

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geq \frac{1}{M(r,R)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+\left|L_n(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t - M(r,R)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_-\left|L_n(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t,$$

puis que

$$\frac{2\pi}{n}I_n(z,R) \geq \frac{2\pi M(r,R)}{n}I_n(0,R) - \left(M(r,R) - \frac{1}{M(r,R)}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\ln_+\left|L_n(Re^{it})\right|\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire l'existence d'une constante positive $B_2(r,R)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\inf_{z\in\mathcal{B}_r}\frac{1}{n}I_n(z,R) \leq -B_2(r,R)\right) = 0.$$

6) Déduire de ce qui précède que $\frac{3}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r}I_n(z,R)^2\,\mathrm{d}\lambda(z)$ est bornée en probabilité.

7) Soit toujours $0 < r < R$.

a) Justifier l'existence d'une constante $C_1(r,R)$ telle que

$$\sup_{y\in\mathcal{B}_r}\int_{\mathcal{B}_r}\ln^2\left|\frac{R(z-y)}{R^2-\bar{y}z}\right|\,\mathrm{d}\lambda(z) < C_1(r,R).$$

b) Justifier l'existence d'une constante $C_2(r,R)$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_r}\left(\frac{1}{n^2}\ln^2|L_n(z)| - \frac{3}{n^2}I_n(z,R)^2\right)\mathrm{d}\lambda(z) \leq C_2(r,R).$$

c) En déduire que

$$\frac{1}{n^2}\int_{\mathcal{B}_r} \ln^2 |L_n(z)|\, \mathrm{d}\lambda(z)$$

est bornée en probabilité.

8) Conclure que si Ψ est une fonction continue, à support compact sur $\mathbf{C}$, et à valeurs réelles, alors la suite

$$\left(\frac{1}{n}\int_{\mathbf{C}} (\ln |L_n(z)|)\, \Psi(z)\mathrm{d}\lambda(z)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$$

converge en probabilité vers 0.

C. Démonstration du résultat

1) En utilisant un des résultats de la partie **II**, justifier que pour toute fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbf{C}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on a

$$\frac{1}{2\pi n}\int_{\mathbf{C}} (\ln |L_n(z)|)\, \Delta\varphi(z)\, \mathrm{d}\lambda(z) = \frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C} \text{ tel que } P_n'(z)=0} \varphi(z) - \frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C} \text{ tel que } P_n(z)=0} \varphi(z).$$

2) Justifier que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{z\in\mathbf{C} \text{ tel que } P_n(z)=0} \varphi(z)$ tend presque sûrement vers $\displaystyle\int_{\mathbf{C}} \varphi\, \mathrm{d}\mu$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Conclure.

Bibliographie

[1] ABELSON H. SUSSMAN G. J. SUSSMAN J. Structure and interpretation of computer programs MIT PRESS

[2] AEBISCHER B L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique VUIBERT

[3] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[4] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[5] L. Collectif Cours et exercices d'informatique VUIBERT

[6] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[7] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[8] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[9] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[10] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[11] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[12] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[13] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[14] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[15] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie
Tome I
Tome II ELLIPSES

[16] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse DUNOD

[17] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[18] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[19] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[20] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[21] ARNOLD V. lectures on partial differential equations SPINGER SPINGER

[22] ARNOLD A. Mathématiques pour l'informatique EDISCIENCES

[23] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[24] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[25] ALBERT L. Collectif Cours et exercices d'informatique VUIBERT

[26] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[27] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[28] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[29] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[30] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[31] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[32] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[33] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[34] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[35] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I
Tome II ELLIPSES

[36] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse DUNOD

[37] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[38] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[39] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[40] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[41] ARNOLD V. lectures on partial différentiel équations SPINGER SPINGER

[42] ARNOLD A. Mathématiques pour l'informatique EDISCIENCES

[43] GUESSARIAN I. ARTIN E. Algèbre géométrique GAUTHIERVILLARS

[44] ARTIN E. Algèbre géométrique GABAY

[45] ARTINM. Algebra PRENTICE HALL PRENTICE HALL

[46] AUBIN J.P. Analyse fonctionnelle appliquée
Tome 1
Tome 2 PUF

[47] AUTEBERT J.M. Calculabilité et décidabilité MASSON

[48] AUTEBERT J.M. Théorie des langages et des automates MASSON

[49] AUDIN M. Géométrie de la licence à l'agrégation BELIN

[50] AVANISSIAN V. Initiation à l'analyse fonctionnelle PUF

[51] AVEZ A. Calcul différentiel MASSON

[52] BAASE S. VAN GELDER A. Computer algorithms Introduction to design & analysis ADDISON

[53] WESLEY BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A., PETIT A.

[54] SANTHAM., WEIL P., ZEITOUNM. Problèmes d'informatique fondamentale SPRINGER

[55] BACAER N. Histoires de mathématiques et de populations CASSINI

[56] BAJARD J.C. Exercices d'Algorithmique ITP

[57] BAKHVALOV N. Méthodes numériques MIR

[58] BARANGER J. Analyse numérique HERMANN

[59] BARBE Ph. LEDOUXM. Probabilité (De la licence à l'agrégation) BELIN

[60] BARRETM. BENIDIRM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD DUNOD

[61] BASILI B. PESKINE C. Algèbre DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES

[62] BASS J. Cours deMathématiques
Tome 1
Tome 2 MASSON

[63] BHATIA R. Matrix Analysis SPRINGER

[64] BAUER F. L. Decrypted secrets.Methods and maxims of cryptology SPRINGER

[65] BENDER C. ORSZAG S. Advanced mathematical methods for scientists and engineers MC GRAW HILL

[66] BENIDIRM. BARRETM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD

[67] BENOIST J. et Alii Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés PEARSON EDUCATION

[68] BENOIST J.SALINIER A. Exercices de calcul intégral Dunod

[69] BENZONI-GAVAGE S Calcul différentiel et équations différentielles DUNOD

[70] BERCU B. CHAFAI D. Modélisation stochastique et simulation DUNOD

[71] BERGER M. GOSTIAUX B. Géométrie différentielle ARMAND

[72] COLIN BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X. Problèmes de géométrie commentés et rédigés CÉDIC/NATHAN

[73] BERGER M. Géométrie Index
1. Action de groupes, espaces affines et projectifs
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères
3. Convexes et polytopes, olyèdres réguliers,aires et volumes
4. Formes quadratiques,quadriques et coniques
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères CÉDIC/NATHAN

[74] BERGER M. Géométrie tome 2 NATHAN

[75] BERGER M. Géométrie vivante CASSINI

[76] BERLINE N. SABBAH C. Groupes finis, journées X-UPS 2000 EDITIONS DE L'X

[77] BHATIA R. Matrix analysis 1 SPRINGER

[78] BICKEL P.J. DOKSUM K.A. Mathematical statistics PRENTICE HALL

[79] BIDEGARAY B. MOISAN L. Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation SPRINGER

[80] BIGGS NORMAN L. Discrete mathematics OXFORD SCIENCE

[81] PUBLICATIONS BLANCHARD A. Les corps non commutatifs PUF

[82] BILLINGSLEY P. Probability and measure COPYRIGHTED MATERIAL

[83] BOAS R. A primer of real functions MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

[84] BOISSONAT J.D. YVINEC M. Géométrie algébrique EDISCIENCE

[85] BON J.L. Fiabilité des systèmes MASSON

[86] BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C. PENNEQUIN D. Optimisation numérique SPRINGER

[87] BONY J.M Cours d'analyse Ecole polytechnique

[88] BONY J.M Méthodes mathématiques pour les sciences physiques Ecole polytechnique

[89] BOUALEMH. BROUZET J.C. ELSNER B. KACZMAREK L. Mathématique L1 PEARSON EDUCATION

[90] BOURBAKI N. Éléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à X
Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII
Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III
Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV HERMANN

[91] BOURGADE P. Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 CASSINI

[92] BOUVIER A. RICHARD D. Groupes HERMANN

[93] BREMAUD P Introduction aux probabilités SPRINGER

[94] BREZIS H. Analyse fonctionnelle, théorie et applications MASSON

[95] BRIANE M. PAGES G. Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition VUIBERT

[96] BROUSSE P. Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. ARMAND

[97] COLIN BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J. Microcomputers and Mathematics CAMBRIDGE

[98] CABANE R. LEBOEUF C. Algèbre linéaire
1. Espaces vectoriels , Polynômes
2. Matrices et réduction ELLIPSES

[99] CABANNES H. Cours de Mécanique générale DUNOD

[100] CALAIS J. Éléments de théorie des anneaux PUF

[101] CALAIS J. Éléments de théorie des groupes PUF

[102] CANDELPERGHER B. Calcul intégral CASSINI

[103] CANDELPERGHER B Théorie des probabilités Calvage et Mounet

[104] CALDERO P. GERMONI J Histoires hédonistes de groupes et de géométries Calvage et Mounet

[105] CARREGA J.C. Théorie des corps HERMANN

[106] CARTAN H. Calcul différentiel (1971) HERMANN

[107] CARTAN H. Cours de calcul différentiel (1977) HERMANN

[108] CARTAN H. Formes différentielles HERMANN

[109] CARTAN H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques HERMANN

[110] CARTON O. Langages formels, calculabilité et complexité VUIBERT

[111] CASTLEMAN K.R. Digital image processing PRENTICE HALL

[112] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics I WILEY INTERSCIENCE

[113] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics II WILEY INTERSCIENCE

[114] CHABAT B. Introduction à l'analyse complexe MIR

[115] CHAMBERT-LOIR A. Algèbre corporelle EDITIONS DE L'X

[116] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V. Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) MASSON

[117] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. Exercices de mathématiques pour l'agrégation
Analyse 2
Analyse 3 MASSON

[118] CHARPENTIER E. NIKOLSKI N. Leçons de mathématiques d'aujourd'hui Vol 1 Vol 2 Vol 3 Vol 4 ELLIPSES

[119] CHARLES J. MBEKHTAM. QUEFFELEC H. Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs ELLIPSES

[120] CHATELIN F. Valeurs propres de matrices MASSON

[121] CHILDS L. A concrete introduction to Higher Algebra SPRINGER

[122] VERLAG CHOQUET G. Cours d'analyse Tome II : Topologie MASSON

[123] CHOQUET G. L'enseignement de la géométrie HERMANN

[124] CHOIMET D. QUEFFELEC H. Analyse mathématique CASSINI

[125] CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S. Algèbre 1 Algèbre 2 ELLIPSES

[126] CIARLET P.G. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation MASSON

[127] COGIS O. ROBERT C. Au-delà des ponts de Knisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes VUIBERT

[128] COHN P.M. Algebra Volume 1 JOHN WILEY

[129] COLLET H. GIRARD B. Mathématique BTS industriel NATHAN